भौतिक विज्ञान

संपादकीय समिति

प्रो० डी० डी० पन्त (अध्यक्ष)
कुलपति
कुमायूं विश्वविद्यालय
नैनीताल (उ० प्र०)

प्रो० रईस अहमद (सदस्य)
निदेशक, राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्
नई दिल्ली-110016

प्रो० बी० रामचन्द्र राव (सदस्य)
उपाध्यक्ष, विश्वविद्यालय अनुदान आयोग
बहादुरशाह जफर मार्ग
नई दिल्ली-110001

प्रो० एम० एस० स्वामी (सदस्य)
अलीगढ़ मुस्लिम विश्वविद्यालय
अलीगढ़ (उ० प्र०)

प्रो० एस० के० जोशी (सदस्य)
रुड़की विश्वविद्यालय
रुड़की (उ० प्र०)

डा० एस० जी० गंगोली (सदस्य)
रीडर, विज्ञान एवं गणित शिक्षा विभाग
राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्
नई दिल्ली-110016

प्रो० बी० शरण (संयोजक)
अध्यक्ष, विज्ञान एवं गणित शिक्षा विभाग
राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्
नई दिल्ली-110016

लेखक (अंग्रेजी पाण्डुलिपि)

प्रो० बी० रामचन्द्र राव
प्रो० एम० एस० स्वामी
प्रो० बी० एल० खण्डेलवाल
प्रो० बी० शरण
डा० एस० जी० गंगोली
श्री बी० एस० मूर्थी

प्रो० एस० के० जोशी (मुख्य संपादक)

हिन्दी अनुवादक

डा० एन० सी० वार्ष्णेय
भौतिक विभाग
रुड़की विश्वविद्यालय
रुड़की (उ० प्र०)

डा० आर० एन० राय
10ए/4 शास्त्री नगर
नई दिल्ली-110007

भौतिक विज्ञान

उच्चतर माध्यमिक स्कूलों की
कक्षा XI-XII के लिए
पाठ्यपुस्तक

भाग-1

राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्

पुस्तक का प्रथम संस्करण राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् की अनुमति से अगस्त 1977 में गुरुदास कपूर एण्ड संज (प्रा०) लिमिटेड, दिल्ली द्वारा परिषद् की अनुमति से दो खण्डों में प्रकाशित हुआ था।

प्रथम संस्करण
अगस्त 1977
पुनर्मुद्रण
जुलाई 1979 आषाढ़ 1901
जुलाई 1980 आषाढ़ 1902

P. D. 1T

मूल्य : 8.05

प्रकाशन विभाग से श्री विनोद कुमार पंडित, सचिव, राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, श्री अरविंद मार्ग, नई दिल्ली-110016 द्वारा प्रकाशित तथा जे. के. आफसेट प्रिंटर्स, जामा मस्जिद दिल्ली 110006, में मुद्रित।

प्राक्कथन

शिक्षा को समाज के लिए अधिक संगत बनाने के उद्देश्य से राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् ने अनेक स्कूल-विषयों के लिए सम्पादकीय समितियों का गठन किया ताकि पाठ्यक्रम को अंतिम रूप दिया जा सके तथा उनके अनुरूप पाठ्यपुस्तक लिखी जा सके। इन पुस्तकों में हमारी स्थानीय एव राष्ट्रीय समस्याओं के अतिरिक्त सामाजिक न्याय, ग्रामीण विकास, तथा धर्म-निरपेक्ष समाजवादी एव लोकतन्त्रीय गणतत्र के निर्माण से सम्बन्धित हमारी चेतनाओ को भी प्रतिबिम्बित करना था। परन्तु हमारे पाठ्यक्रम पर अनेक ऐसे प्रतिबन्ध हैं जिनको ध्यान में रखना आवश्यक है, उदाहरण-स्वरूप—किसी विशेष कक्षा में प्रवेश पाने वाले छात्रों का स्तर, अथवा पाठ्यक्रम का संचालन करने वाले शिक्षकों का ज्ञान एव उनके प्रशिक्षण का स्तर। अतः पाठ्यपुस्तके उचित दिशा में सम्भवतः प्रथम चरण हो सकती है। आशा है कि शिक्षकों एवं विद्यार्थियों से प्राप्त प्रतिक्रियाओं एवं सुझावो के फलस्वरूप पाठ्यपुस्तकों में यथोचित्त संशोधन करना सम्भव हो सकेगा।

10+2 शिक्षा प्रणाली के अंतर्गत प्रस्तुत पुस्तक सामान्य रूप से शैक्षिक धारा की 11वीं कक्षा की भौतिकी के पाठ्यक्रम के लिए निर्दिष्ट है। 12वीं कक्षा की पाठ्यपुस्तक अगले सत्र से पूर्व उपलब्ध होने की आशा है। किसी पुस्तक की भौतिक विशेषतायें उसकी लचक, क्रियाशीलता, वैचारिक स्पष्टता तथा विषयानुसार दृष्टिकोण है। श्रेय पर आधारित उपसत्रीय प्रणाली को कार्यान्वित करने के लिए यह पुस्तक विभिन्न एककों में व्यवस्थित की गई है। इनमें से कुछ एकक सम्भवतः शैक्षिक धारा से व्यावसायिक धारा में प्रवेश हेतु सेतु एककों के रूप में कार्य कर सकें।

मैं सम्पादकीय समिति के सदस्यो, लेखको तथा सम्पादकों के प्रति अपना आभार प्रकट करता हूँ जिन्होंने कुछ ही महीनों के अल्पकाल में इस कार्य का उत्तरदायित्व अपने ऊपर लिया तथा उत्तम रूप से इसको पूर्ण किया। मैं श्री गंगासिह रौतेला (शोध छात्र) का भी आभारी हूँ जिन्होंने इस पुस्तक की पाण्डुलिपि को ध्यानपूर्वक पढ़ा और त्रुटियों को संशोधित करने में अपना पूर्ण सहयोग प्रदान किया।

पुस्तक के सुधार हेतु सभी सुझावों का हम स्वागत करेंगे।

रईस अहमद
निदेशक
राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्

नई दिल्ली
25 अप्रैल 1977

विषय-सूची

माप (Measurement)

1.1 लम्बाई और काल (Length and Time)

प्राचीन काल से ही मानव को आकाश और काल का ज्ञान रहा है। लम्बाई और दूरी मापने के लिए किसी समय में क्यूबिट[1], व्याम[2] और फुट (पद) का प्रयोग होता था। मानव मस्तिष्क का ध्यान तारों की ओर तथा आकाश में चन्द्रमा की गति की ओर भी गया। इस प्रकार ज्योतिष के अध्ययन की नींव पड़ी। दिन-रात और उसी प्रकार, ऋतुओं के क्रमपूर्वक आने को देख कर समय की गति का ज्ञान हुआ। मानव शरीर में भी, देखा जाय तो, एक प्रकार की घड़ी लगी हुई है। यह हमारा हृदय है, जो जन्म से मृत्यु तक, पूरे जीवन भर लगातार स्पंदन करता रहता है। किसी जमाने में काल के छोटे अन्तराल को मापने के लिए नाड़ी का प्रयोग किया जाता था। आकाश में दिन में सूर्य की स्थिति को देख कर तथा रात में तारों की स्थिति को देखकर समय का अनुमान लगाया जाता था।

पिछली कक्षाओं में हम सौर मण्डल के विषय में पढ़ चुके हैं। हमारी पृथ्वी भी इस सौर मण्डल का एक ग्रह है। पृथ्वी का अर्धव्यास $6{\cdot}4 \times 10^6$ मी है, और इसका प्राकृतिक उपग्रह, चन्द्रमा, इससे $3{\cdot}85 \times 10^8$ मी दूर है। सूर्य की पृथ्वी से औसत दूरी $1{\cdot}50 \times 10^{11}$ मी है। पिछली कक्षा में हम लम्बाई मापने के खगोलीय मात्रक (A.U.) के विषय में पढ़ चुके हैं। खगोलीय दूरियों को मापने के लिए एक अन्य मात्रक का भी प्रयोग किया जाता है, जो खगोलीय मात्रक से भी बड़ा होता है। इस मात्रक को प्रकाश-वर्ष कहते हैं, और इसका परिमाण उतनी दूरी के बराबर होता है जितनी दूरी प्रकाश किरण एक वर्ष में चल कर तय करती है। एक प्रकाश-वर्ष लगभग $9{\cdot}47 \times 10^{15}$ मी होता है।

सौर मण्डल से बाहर का निकटतम तारा किन्नर प्रथम (अल्फा सेन्टोरी) है, और यह पृथ्वी से 4·3 प्रकाश-वर्ष दूर है। तारों के पुंज को मन्दाकिनी कहते हैं। कभी अंधेरी रात में जब आकाश निर्मल हो, तो हम आकाशगंगा देख सकते हैं। यह, आकाशगंगा, एक मन्दाकिनी है और हमारा सूर्य इसी का एक तारा है। हमारी इस मन्दाकिनी में अरबों तारे हैं। किसी सामान्यतः बड़ी मन्दाकिनी में लगभग 1 खरब[3] तारे होते हैं जो 1 से 2 लाख प्रकाश-वर्ष के अन्तराल में बिखरे हैं। किसी मन्दाकिनी की अपनी पडोस की मन्दाकिनी से दूरी कुछ लाख से लेकर

---

1. कोहनी से लेकर मध्यमा अँगुली तक की लम्बाई को एक क्यूबिट कहते हैं।
2. महाभारत काल में प्रयुक्त लम्बाई का एक माप। दोनों हाथों को फैलाकर जितनी लम्बाई होती है उसे एक व्याम कहते हैं।
3. 1 खरब $= 10^{11}$

दसियों लाख प्रकाश-वर्ष तक की हो सकती है।

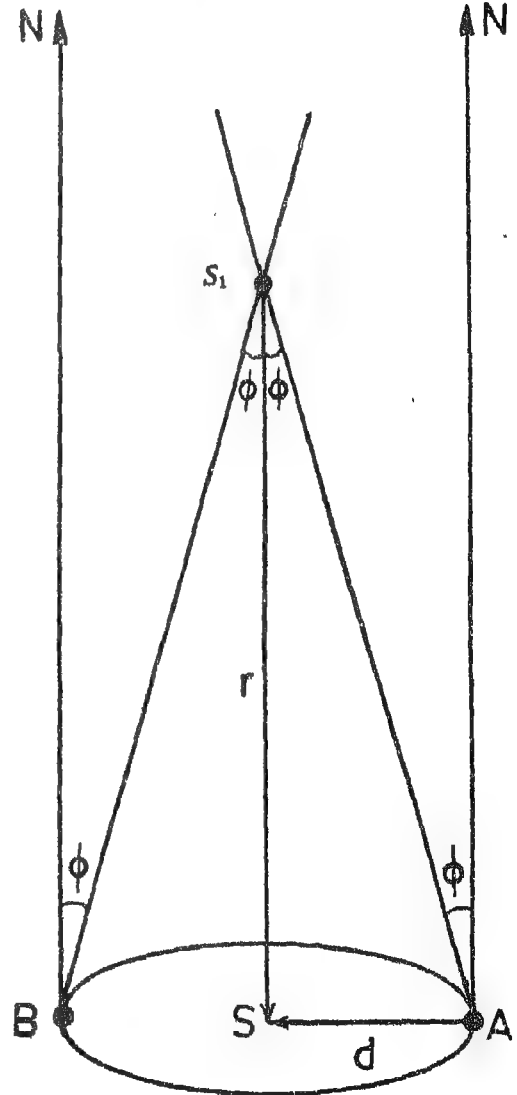
ऐसा पाया गया है कि मन्दाकिनियाँ पृथ्वी से दूर भागी जा रही है, और उनका वेग पृथ्वी से दूरी के बढ़ने के साथ-साथ ही बढ़ता जा रहा है। यदि यह माना जाय कि उनका अधिकतम वेग प्रकाश के वेग के बराबर है, तो गणना करने पर विश्व (ब्रह्माण्ड) का अधिकतम आकार 10 अरब प्रकाश-वर्ष निकलता है।

दूसरी ओर, आणविक और आन्तर-आणविक पैमाने में दूरियाँ बहुत ही छोटी होती है। उदाहरण के लिए, हाइड्रोजन के परमाणु का अर्धव्यास 5×10^{-11} मी है, और प्रोटॉन का प्रभावी अर्धव्यास 1.2×10^{-15} मी है।

1.2 माप (Measurement)

लम्बाई : यदि हमें किसी कमरे की लम्बाई मापनी हो, तो हम एक मीटर की छड़ लेकर देखेंगे कि लम्बाई मीटर की छड़ से कितनी गुनी बड़ी है। यदि यह लम्बाई मीटर की छड़ की 5 गुनी हो तो हम कहेंगे कि कमरा 5 मीटर लम्बा है। इस प्रकार प्रत्यक्ष तुलना करके मापने की विधि सरल होते हुए भी कभी-कभी मापना संभव नहीं हो पाता, और तब लम्बाई मापने के लिए अप्रत्यक्ष विधियाँ अपनानी आवश्यक हो जाती हैं।

एक उदाहरण लें। माना कि हमें किसी स्थान से एक पहाड़ की दूरी मापनी है, और प्रत्यक्ष माप करने के लिए पहाड़ तक पहुँचना संभव नहीं। ऐसी स्थिति में कोई अप्रत्यक्ष विधि अपनाई जा सकती है, जैसे कि एक बन्दूक दाग दी जाय और बन्दूक के दागने तथा पहाड़ से इसकी गूंज सुनाई पड़ने के समय को माप लिया जाय। यदि हमें प्रयोगशाला में किए गए प्रयोगों द्वारा इस ताप पर ध्वनि का वेग मालूम हो तो उपर्युक्त प्रयोग में मापे गये समय के आधे को ध्वनि के वेग से गुणा करने पर पहाड़ की दूरी निकल आयेगी। दूरी की अप्रत्यक्ष मापन विधि में भी लम्बाई के किसी मात्रक का निर्धारण करना आवश्यक होता है। इस उदाहरण में लम्बाई के मात्रक का प्रयोग ध्वनि का वेग निकालते समय किया गया था। पहाड़ की दूरी निकालने के लिये यह माना गया है कि उप-प्रयोग द्वारा निर्धारित ध्वनि के वेग का मान मुख्य प्रयोग के लिए भी सही है। इस सिद्धान्त के आधार पर ही चन्द्रमा की पृथ्वी से दूरी रेडियो तरंगों को भेजकर ज्ञात की गई थी।

खगोलीय दूरियों को केवल अप्रत्यक्ष विधियों द्वारा ही मापना संभव है। जो तारे हमारे निकट हैं उनकी दूरी

चित्र 1.1 त्रिभुजन अथवा लम्बन-विधि से किसी निकट के तारे की पृथ्वी से दूरी ज्ञात करना। दिशायें BN, AN दूरस्थ तारे N की ओर दर्शायी गई हैं।

पृथ्वी की कक्षा के व्यास कोआधार-रेखा बनाकर त्रिभुजन अथवा लंबन-विधि द्वारा ज्ञात की जा सकती है।

इसके सिद्धान्त को समझने के लिये चित्र 1.1 में दिखाये गये एक सरल उदाहरण पर विचार करें। माना कि S_1 निकट का वह तारा है जिसकी दूरी मालूम करनी है। इसके लिए हम किसी ऐसे दूर के तारे (जैसे N) को लेंगे जिसकी दिशा पृथ्वी की कक्षा में स्थित सभी स्थानों से वस्तुत: एक ही रहती हो। अब कल्पना कीजिए कि पृथ्वी के किसी एक स्थिति (जैसे A) में होने पर हमने दूरबीन की सहायता से दूरस्थ तारे N और तारे S_1 की दिशाओं के बीच के कोण, अर्थात् AN और AS_1 के बीच के कोण को माप लिया। छः महीने बाद पृथ्वी अपनी कक्षा में B स्थिति पर पहुँच जायेगी, जो A की व्यासाभिमुखी स्थिति है। उस समय B से हम फिर उन दोनों दिशाओं के बीच के कोण को माप लेंगे। इन दोनो कोणों के परिमाणों का योग S_1 तारे द्वारा पृथ्वी के व्यास AB पर बनाये गये कोण के परिमाण के बराबर हुआ।

चित्र 1·1 में दिखाये गये इस उदाहरण द्वारा यह सरलता से समझा जा सकता है कि—

$$\frac{d}{r} = \tan \phi$$

$$\text{अत: } r = \frac{d}{\tan \phi} \qquad (1.1)$$

इस विधि से केवल उन थोड़े से तारों की ही दूरी निर्धारित की जा सकती है जो अपेक्षाकृत पृथ्वी के निकट हैं। तारा जितनी ही अधिक दूरी पर होगा, कोण ϕ उतना ही छोटा होगा, बहुत दूर स्थित तारों के लिए ϕ इतना छोटा हो सकता है कि उसे इस विधि से सही-सही मापना संभव न रहे। अत: दूरस्थ तारो में लिए दूसरी अप्रत्यक्ष विधियाँ काम में लाई जाती है। उदाहरणार्थ, एक विधि यह है : माना कि दो तारे हैं। एक दूर का और एक पास का। माना कि दोनों तारे समान शक्ति के प्रकाशस्रोत हैं, और निकटस्थ तारे की दूरी हमें ज्ञात है। अब यदि उन दोनों तारों के फोटोग्राफ लें और उन की तुलना करें तो दूरस्थ तारे का बिम्ब निकटस्थ तारे के बिम्ब की अपेक्षा क्षीण प्रतीत होगा। प्रतिलोप-वर्ग-नियम के अनुसार इन बिम्बों की तीव्रताओं का अनुपात उनकी दूरियों के वर्ग के प्रतिलोम के अनुपात में होगा। अत: बिम्बों की तीव्रताओं की तुलना करके दूरस्थ तारे की दूरी ज्ञात हो जायेगी। यह विधि बहुत सही नहीं है, क्योंकि वे दोनों तारे पूर्णतया समान शक्ति के स्रोत शायद न हों। किन्तु फिर भी इस विधि से दूरस्थ तारो की दूरियो का अनुमान तो लगाया ही जा सकता है।

हब्बिल (Hubble) ने दूरस्थ मन्दाकिनियों के प्रकाश के स्पेक्ट्रम का अध्ययन करते हुए पाया कि इनमें रेखाओं का स्थान बदला हुआ है। डॉप्लर प्रभाव के आधार पर उसने इससे यह निष्कर्ष निकाला कि दूरस्थ मन्दाकिनियाँ हमसे दूर भाग रही है (देखिए परिच्छेद 5.2)। बाद के अनुसंधानो से यह बात प्रकाश में आई कि जितनी ही अधिक दूर की मन्दाकिनी होगी उतना ही अधिक उसका वेग होगा। अत: यह माना जाता है कि विश्व (ब्रह्माण्ड) फैल रहा है।

अणु और परमाणुओं से सम्बद्ध अन्तराल (फासले) जो बहुत सूक्ष्म होते हैं, केवल अप्रत्यक्ष विधियों द्वारा ही मापे जा सकते हैं। जैसे कि अणु का आकार ऐवोगेड्रो (Avogadro) की परिकल्पना के आधार पर तथा सोने के परमाणुनाभिक का आकार रदरफोर्ड के एल्फा-कणों के प्रकीर्णन प्रयोग द्वारा मापा गया था। α-कणों के प्रकीर्णन के प्रयोग से प्राप्त स्वर्ण के परमाणुनाभिक का व्यास 10^{-14} मी के आयाम का है।

खगोलीय से लेकर अन्तर-आणविक तक मापी जा सकने योग्य दूरी किस परिमाण की है इसका लेखा तालिका 1·1 में दिया गया है।

काल (Time)

हमें समय के ज्ञान की आवश्यकता इसलिए होती है कि हम नित्य प्रति के व्यवहार में समयानुसार कार्य कर सकें। वैज्ञानिक कार्यों में काल के अन्तरालों की माप आवश्यक होती है। प्राचीन काल में समय का अनुमान दिन में किसी खम्भे की छाया को देखकर कर लिया जाता था। इसी सिद्धान्त पर सूर्य घड़ी बनाई गई है।

पुनरावर्तित होने वाली कोई भी क्रिया काल के माप के लिए प्रयुक्त हो सकती है। पैण्डुलम का दोलन और कुण्डलित कमानी का कम्पन इसी प्रकार की क्रियाएँ हैं

उनकी आवृत्ति की माप द्वारा ही काल की माप होती है। पृथ्वी का अपनी धुरी पर घूमना प्रकृति की एक आवृत्त होने वाली घटना है। इसी घूर्णन के वेग पर ही दिन का परिमाण निर्भर करता है। प्राचीन काल से ही दिन को समय के एक मानक मात्रक के रूप में माना जाता रहा है। दिन को घण्टा, मिनट और सेकंड में विभक्त किया गया है।

मापे जा सकने योग्य काल के अन्तरालों के परिमाणों के आयाम तालिका 1.2 में दिये गये है।

तालिका 1.1

दूरियों का परिमाण

लम्बाई के परिमाण का आयाम (मीटर में)	उस परिमाण की दूरी
10^{26}	दूरस्थ क्वासर (क्वासी-स्टैलर रेडियो सोर्स)[1] की दूरी
10^{22}	देवयानी (ऐण्ड्रोमेडा) में दीखने वाली बृहद्‌मन्दाकिनी (जो हमारे निकटतम मन्दाकिनी है) की दूरी
10^{20}	हमारी मन्दाकिनी (आकाश गंगा) का व्यास
10^{17}	निकटतम तारे, किन्नर प्रथम (अल्फा-सैंटोरी) की दूरी
10^{13}	ग्रह प्लूटो की सूर्य से औसत दूरी
10^{9}	सूर्य का अर्धव्यास
10^{8}	पृथ्वी की चन्द्रमा से औसत दूरी
10^{7}	पृथ्वी का अर्धव्यास
10^{5}	आगरा और दिल्ली के बीच की दूरी
10^{2}	हॉकी के मैदान की लम्बाई
10^{0}	मनुष्य की ऊँचाई
10^{-2}	अँगुली की चौड़ाई
10^{-4}	कागज के पृष्ठ की मोटाई
10^{-5}	खून के रक्ताणु का व्यास
10^{-8}	विषाणु (वाइरस) का आकार
10^{-10}	हाइड्रोजन परमाणु का व्यास
10^{-14}	बड़े नाभिक का आकार
10^{-15}	प्रोटॉन का व्यास

1. स्टैलर रेडियो सोर्स=तारकवत्‌ रेडियो स्रोत

तालिका 1.2

काल अन्तरालों के परिमाण के आयाम

काल-अन्तराल या आयाम (सेकंडों में)	उस परिमाण के आयाम की घटना
10^{17}	पृथ्वी की आयु
10^{15}	प्रागैतिहासिक जीव की उत्पत्ति का समय
10^{13}	पृथ्वी पर मानव की उत्पत्ति का समय
10^{11}	मिस्र में गाजा के पिरामिडों की आयु
10^{9}	मानव की प्रत्याशित आयु
10^{7}	सूर्य के चारों ओर पृथ्वी का एक चक्कर पूरा करने का काल
10^{5}	पृथ्वी के अपनी कीली पर एक घूर्णन पूरा करने का काल
10^{3}	सूर्य से पृथ्वी तक प्रकाश के आने में लगने वाला काल
10^{2}	एक मिनट
10^{0}	हृदय की कम्पनों के बीच का काल
10^{-2}	बिजली के पंखे के एक चक्कर का काल
10^{-4}	उच्च आवृत्ति की श्रव्य ध्वनि के स्वर के कम्पन का काल
10^{-8}	परमाणु की उत्तेजित अवस्था
10^{-11}	प्रकाश का काँच की प्लेट में से होकर जाने में लगने वाला काल
10^{-15}	हाइड्रोजन-परमाणु में इलेक्ट्रॉन का प्रोटॉन के चारों ओर एक चक्कर पूरा कर लेने का काल
10^{-22}	परमाणु-नाभिक में प्रोटॉन का एक चक्कर पूरा करने का काल

1.3 मात्रक पद्धतियाँ और अन्तर्राष्ट्रीय मात्रक पद्धति (System of units and international system of units)

भौतिक विज्ञान में माप का परिशुद्ध होना अत्यन्त आवश्यक है। इसके बिना प्रयोग में माप पर आधारित परिणामों में परस्पर संबंध बिठाना संभव न हो सकेगा। इसलिए मात्रकों का एक आधार सेट भली प्रकार निर्धारित कर दिया जाना चाहिए। सभी यान्त्रिक मात्रक, जैसे घनत्व, वेग, संवेग, बल और ऊर्जा, तीन आधारभूत राशियों के माध्यम से व्यक्त किए जा सकते है, वे हैं: लम्बाई L, संहित (द्रव्यमान) M और काल T। जैसे, लम्बाई को काल से भाग देकर वेग प्राप्त होता है, अतः

$$\text{वेग} = \frac{L}{T}$$

मात्रकों की सुसंगत पद्धति वह है जो "मूल-मात्रकों" के संयोजन पर आधारित होती है और जिससे केवल गुणा अथवा भाग द्वारा—बिना संख्यात्मक गुणक लगाए ही—सभी "व्युत्पन्न" मात्रक प्राप्त होते हैं। यांत्रिकी में MKS पद्धति सुसंगत पद्धति है। इसमें M, K और S लम्बाई, संहति और काल के मात्रकों क्रमशः मीटर, किलोग्राम और सेकंड के लिए प्रयुक्त हैं। मात्रकों की अन्तर्राष्ट्रीय पद्धति (जिसका शब्द-संक्षेप SI है) में, भौतिकी के सभी क्षेत्रों में इसकी व्यापकता बनाए रखने के लिए, तीन और विमायुक्त राशियाँ सम्मिलित कर ली गई हैं। वे ये हैं:

(1) विद्युतिकी में आधार राशि **धारा-तीव्रता**, जिसका मात्रक एम्पियर (प्रतीक A) है।

(2) ऊष्मा गतिकी में मूल-राशि **ऊष्मागति ताप**, जिसका मात्रक डिगरी केल्विन (प्रतीक K) है।

(3) ज्योतिर्मिति में मूलराशि **ज्योति-तीव्रता** जिसका मात्रक कैंडला (प्रतीक cd) है।

उपर्युक्त छः* मूल मात्रकों पर आधारित इस सुसंगत पद्धति के लिए 1960 में हुए माप और तोल के अन्तर्राष्ट्रीय सम्मेलन ने अन्तर्राष्ट्रीय मात्रक पद्धति का नाम अनुमोदित किया है। इस पद्धति के मात्रकों को SI मात्रक कहते हैं। इनके अतिरिक्त कुछ "विमाहीन" मूल मात्रक भी हैं। इनमें उल्लेखनीय हैं, समतल कोण के लिए प्रयुक्त मात्रक रेडियन (प्रतीक rad), और घन कोण के लिए स्टीरेडियन (प्रतीक sr)। अन्य पद्धतियों की तुलना में अधिक उपयोगी होने के कारण वैज्ञानिकों में इसकी मान्यता अधिक है।

लम्बाई: प्रामाणिक मीटर "अन्तर्राष्ट्रीय आदिरूप मीटर" है, जो पेरिस के निकट सेव्रे स्थित माप और तोल के अन्तर्राष्ट्रीय ब्यूरो में सुरक्षित रखा हुआ है। लम्बाई का अन्तर्राष्ट्रीय मानक प्लैटिनम-इरिडियम मिश्रधातु की बनी एक छड़ है। इस छड़ के सिरों के निकट सोने के प्लगों पर दो रेखाएँ खुदी हैं। जब छड़ पिघलते बरफ के ताप पर रखी हो तब इन दोनों रेखाओं के बीच की दूरी को एक मीटर कहते है। इस मिश्रधातु की विशेषता यह है कि काल और वातावरण का इस पर कम से कम प्रभाव पड़ता है।

मूलतः विचार यह था कि मीटर पेरिस से होकर जाने वाले पृथ्वी के चतुर्थांश (Quadrant) का एक करोड़वाँ अंश होगा। बाद में अधिक परिशुद्ध निर्धारणों में पाया गया कि मानक मीटर यथार्थ में पृथ्वी के चतुर्थांश का 1 करोड़वां भाग नहीं है। फिर भी प्रामाणिक मीटर अपने मूल रूप में ही चला आ रहा है। यह ध्यान में रखने की बात है कि मात्रक का चुनाव स्वेच्छा से किया जा सकता है परन्तु इसका व्यापक प्रयोग हो। इसके लिए यह आवश्यक है कि इसे अन्तर्राष्ट्रीय मान्यता प्राप्त हो, साथ ही इसका मान समयानुसार भी अपरिवर्तनीय रहना चाहिए। अतः वैज्ञानिक एक ऐसे स्थायी मानक की खोज में रहे। 1960 में वैज्ञानिकों ने इस प्रकार के एक मानक को मान्यता दी है, वह मानक 86 परमाणु द्रव्यमान संख्या वाले क्रिप्टन के समस्थानिक (Isotope) के स्पैक्ट्रम में नारंगी रंग की एक विशिष्ट रेखा की तरंग-लम्बाई है। इस मानक के अनुसार मीटर इस तरंग-दैर्घ्य का 1650763.73 गुना है। अब इस मानक के बन जाने पर मीटर को, जब भी आवश्यक हो, पुनर्स्थापित कर सकते हैं।

सुविधा के लिए मीटर के गुणक तथा दाशमिक अंश भी प्रयोग किए जाते हैं, जैसे, किलोमीटर (1000 मी) और सेंटीमीटर $\left(\frac{1}{100}\text{मी}\right)$। सामान्य उपयोग के कुछ मीट्रिक उपसर्ग तालिका 1.3 में दिए गए हैं।

*बाद में एक अन्य मात्रक मोल को भी मूल मात्रकों में सम्मिलित किया गया है।

तालिका 1.3

मीट्रिक उपसर्ग

उपसर्ग	संक्षेप	अर्थ	उदाहरण
टेरा	T	$\times 10^{12}$	
गिगा	G	$\times 10^{9}$	
मेगा	M	$\times 10^{6}$	1 मेगाटन $= 10^{6}$ टन
किलो	K	$\times 10^{3}$	1 किलोमीटर $= 10^{3}$मी
डेसी	d	$\times 10^{-1}$	
सेंटी	c	$\times 10^{-2}$	1 सेंटीमीटर $= 10^{-2}$मी
मिली	m	$\times 10^{-3}$	1 मिली ऐंपीयर $= 10^{-3}$A
माइक्रो	μ	$\times 10^{-6}$	1 माइक्रोवोल्ट $= 10^{-6}$V
नेनो	n	$\times 10^{-9}$	1 नेनो सेकण्ड $= 10^{-9}$ से
पिको	p	$\times 10^{-12}$	1 पिको फैराड $= 10^{-12}$F
फेम्टो	f	$\times 10^{-15}$	
ऐटो	a	$\times 10^{-18}$	

नोट : ये उपसर्ग किसी भी मात्रक के गुणक और दाशमिक अंश के लिए लगाए जा सकते हैं, चाहे वह मात्रक मीट्रिक पद्धति का हो या न हो।

संहति (Mass) : प्रामाणिक किलोग्राम[1] सेव्रे स्थित माप और तोल के अन्तर्राष्ट्रीय ब्यूरो में रखा हुआ "अन्तर्राष्ट्रीय आदि रूप किलोग्राम" है। यह समान ऊँचाई और व्यास का एक सिलिंडर है, जो 90 प्रतिशत प्लैटिनम तथा 10 प्रतिशत इरिडियम की मिश्रधातु का बना हुआ है। इसे सन् 1889 ई० में मानक के रूप में स्थापित किया गया था। एक ग्राम, 10^{-3} किलोग्राम तथा मीट्रिक टन, 10^{3} किलोग्राम होता है। सन् 1791 में फ्रांस में जब मीट्रिक पद्धति अपनाई गई थी, तब यह विचार था कि ग्राम 4°C पर शुद्ध जल के एक घन सेंटीमीटर की संहति को कहा जाएगा। अधिक परिशुद्ध मापों द्वारा ज्ञात हुआ कि वह यथार्थ में इतना नहीं है। तथापि आदि रूप किलोग्राम को ही प्रामाणिक मानते हैं। ब्रिटिश पद्धति में प्रचलित पाउण्ड और गज जो क्रमश: संहति और लम्बाई के मात्रक है अब मानक किलोग्राम और मीटर से संबद्ध कर दिए गए हैं, और इस प्रकार 1 मानक एवार्डुपाइज पाउण्ड = 0.4535924277 किलोग्राम और 1 मानक गज = 0.9144 मीटर।

संहतियों की तुलना सामान्य तुला से की जाती है। अध्याय 2 में हम पढ़ेंगे कि संहति पदार्थ के एक गुण का परिमाण है जिसे जड़त्व कहते हैं। कमानीदार तुला से हम पदार्थ की संहति नही, अपितु उसका भार मापते हैं। भार उस पदार्थ पर लगने वाला गुरुत्व जनित बल होता है। संहति और भार के भेद को भली प्रकार समझ लेना चाहिए और इस विषय में कोई संभ्रान्ति नही रहनी चाहिए।

काल (Time)

एक दिन के मध्यान्ह से दूसरे दिन के मध्यान्ह तक के काल को "दिन" कहते हैं। यह उतना काल है जितने में पृथ्वी अपनी धुरी पर एक चक्कर पूरा कर लेती है। दिन को 24 घंटों में, प्रत्येक घण्टे को 60 मिनटों और प्रत्येक मिनट को 60 सेकण्डों में विभाजित किया गया है। इस प्रकार सेकण्ड दिन का 1/86400वाँ अंश है। क्योंकि दिन का परिमाण वर्ष में सदा एक समान नहीं रहता, उसमें घट-बढ़ होती रहती है, अत: एक (माध्य सौर) सेकण्ड को माध्य सौर दिन के 1/86400वें अंश के बराबर निर्धारित किया गया है। सेकण्ड काल का मात्रक है। काल का यह मात्रक सभी पद्धतियों में समान है। पृथ्वी के अपनी धुरी के गिर्द घूर्णन में कुछ अनियमितताएँ आ जाती हैं। इसी प्रकार, वर्ष के परिमाण में भी कुछ अन्तर आ जाता है। यद्यपि यह अन्तर थोड़ा ही होता है।

1956 में माप और तोल के अन्तर्राष्ट्रीय सम्मेलन में, वैज्ञानिक कार्यों के लिए अत्यन्त उच्च कोटि की यथार्थता को ध्यान में रखते हुए, सेकण्ड की फिर से व्याख्या की गई। इसका आधार पृथ्वी का अपनी कक्षा पर परिभ्रमण बनाया गया। इस व्याख्या के अनुसार सेकंड को *सायन*

1. प्रामाणिक किलोग्राम और प्रामाणिक मीटर के प्रतिरूप राष्ट्रीय भौतिक प्रयोगशाला, नई दिल्ली, में रखे हैं।

वर्ष 1900 का 1/31556925.9747वाँ अंश करके निर्धारित किया गया। फिर भी; काल के और अधिक विश्वसनीय मात्रक की आवश्यकता बनी रही और उसकी खोज होती रही। अब काल का मानक एक ऐसी 'परमाणविक घडी' के आधार पर स्थिर किया गया है, जिसकी रचना का आधार 133 परमाणुभार के सीज़ियम परमाणु के दोलनों की आवृत्ति है। यह 10^{11} के कुछ अंश तक यथार्थ है। इस मानक को 1964 में स्वीकार कर लिया गया था, किन्तु उसे "अस्थाई" कहा गया था, क्योंकि ऐसी आशा है कि हाइड्रोजन अथवा थैलियम सरीखे किसी अन्य परमाणु के आधार पर बनाया गया मानक अधिक पुनरुत्पादनीय होगा।

यह उल्लेखनीय है कि CGS पद्धति में लम्बाई, संहति और काल के लिए मूल-मात्रक में सेंटीमीटर, ग्राम और सेकंड हैं। FPS पद्धति अथवा ब्रिटिश पद्धति में ये मूल-मात्रक क्रमशः फुट, पाउण्ड तथा सेकण्ड हैं। विज्ञान के क्षेत्र में अब केवल SI मात्रकों का ही प्रचलन होता है।

1.4 विमाएँ (Dimensions)

यांत्रिकी में प्रयुक्त सभी व्युत्पन्न मात्रक लम्बाई, संहति और काल के मूल-मात्रकों के माध्यम से व्यक्त किए जा सकते हैं। उदाहरणार्थ,

$$\text{घनत्व} = \frac{\text{संहति}}{\text{आयतन}} = \frac{\text{संहति}}{(\text{लम्बाई})^3} = \frac{(M)}{(L)^3} = (ML^{-3})$$

$$\text{वेग} = \frac{(L)}{(T)} = (LT^{-1})$$

$$\text{त्वरण} = \frac{\text{वेग वृद्धि}}{\text{काल}} = \frac{(L)/(T)}{T} = \frac{(L)}{(T)^2} = (LT^{-2})$$

यहाँ L, M, T, क्रमशः लम्बाई, संहति और काल के प्रतीक है। व्युत्पन्न-मात्रकों में मूल-मात्रकों के जो घात होते हैं, वे व्युत्पन्न मात्रक की विमाएँ कहलाती हैं। आयतन की लम्बाई में तीन विमाएँ होती हैं, और इसे L^3 लिखते हैं। घनत्व की विमाएँ संहति में 1 और लम्बाई में —3 हैं, और इसे ML^{-3} लिखते हैं। सामान्यतः राशियों की विमाएँ ऊपर लिखे प्रकार के समीकरणों द्वारा व्यक्त करते हैं। इन समीकरणों को विमीय समीकरण कहते हैं। कुछ राशियाँ जैसे कोण और सूचकांक विमाहीन राशियाँ होती हैं। सख्याओं की भी कोई विमा नहीं होती। आपेक्षिक घनत्व जैसी राशियाँ जो दो समान मात्रकों वाली राशियों के अनुपात रूप में प्राप्त होती हैं, विमाहीन होती हैं। राशि चाहे किसी भी मात्रक में व्यक्त की जाय, उसकी विमाएँ वही रहेंगी।

विमाओं के प्रयोग द्वारा हम किसी समीकरण की सत्यता की जाँच कर सकते हैं। जैसे इस समीकरण को लें।

$$v_f^2 = v_i^2 + 2as$$

यदि समीकरण के प्रत्येक पद की विमाएँ समान हैं तो समीकरण सही है। इस समीकरण में v_f और v_i वेग हैं, a त्वरण है और s तय की हुई दूरी है। v_f और v_i की विमाएँ समान है, अर्थात LT^{-1}, और a की विमाएँ LT^{-2} है। अब जाँच करने पर :

v_f^2 और v_i^2 को विमाएँ $= L^2T^{-2}$

2as की विमाएँ $= LT^{-2}L = L^2T^{-2}$

स्पष्ट है कि समीकरण के प्रत्येक पद की विमाएँ समान हैं। अतः समीकरण सही है।

विमाओं का प्रयोग भौतिक राशियों में सम्बन्ध स्थापित करने वाले ऐसे सरल समीकरणों को व्युत्पन्न करने में भी किया जा सकता है जिनमें सम्बद्ध भौतिक राशियाँ ज्ञात हों। उदाहरण के लिए, सरल लोलक के आवर्तकाल को व्यक्त करने वाला समीकरण व्युत्पन्न किया जा सकता है।

सरल लोलक के आवर्तकाल (T) को निर्धारित करने वाली राशियाँ सम्भवतः लोलक की लम्बाई 1, गोलक की संहित m तथा उस स्थान पर गुरुत्वजनित त्वरण g हो सकते है। माना कि आवर्तकाल का समीकरण है

$$T = K.\ l^x.m^y.g^z.$$

इसमें K कोई विमाहीन संख्यात्मक स्थिरांक है। इस समीकरण में राशियों की विमाएं प्रतिस्थापित करने पर

$$(T) = (L)^x(M)^y(LT^{-2})^z$$
$$= (L)^{x+z}(M)^y(T)^{-2z}$$

दोनों ओर L, M और T के घातों को समीकृत करने पर

$x+z=0,\ y=0$ और $-2z=1$

$x=\frac{1}{2},\ y=0$ और, $z=-1/2$

$$\therefore\ T = Kl^{\frac{1}{2}}m^0g^{-\frac{1}{2}} = K\sqrt{l/g}$$

सुसंगत मात्रकों में राशियों के मान को प्रतिस्थापित करने पर K का मान निकल सकता है।

ऊर्जा और कार्य की विमाएँ समान होती है। तालिका 1.4 में कुछ यांत्रिक राशियों की विमाएँ दी गई है।

तालिका 1.4

विमाएँ

राशि	मापन-विधि	विमाएँ	संकेत
लम्बाई		L	मी
संहति		M	किग्रा
काल		T	से
क्षेत्रफल	लम्बाई × लम्बाई	L^2	मी^{2}
आयतन	लम्बाई × लम्बाई × लम्बाई	L^3	मी^{3}
घनत्व	संहित/आयतन	$L^{-3}M$	किग्रामी$^{-3}$
वेग	दूरी/काल	LT^{-1}	मी से$^{-1}$
त्वरण	वेगवृद्धि/काल	LT^{-2}	मी से$^{-2}$
संवेग	संहित × वेग	LMT^{-1}	न्यू
बल	संहित × त्वरण	LMT^{-2}	मीकिग्रा से$^{-2}$
कार्य और ऊर्जा	बल × दूरी	L^2MT^{-2}	जूल
शक्ति	कार्य/काल	L^2MT^{-3}	वाट
दाब	बल/क्षेत्रफल	$L^{-1}MT^{-2}$	पास्कल
कोण	चाप/अर्धव्यास	L^0	रेडियन
कोणिक वेग	कोण/काल	L^0T^{-1}	रेडियन से$^{-1}$
कोणिक त्वरण	कोणिक वेग/काल	L^0T^{-2}	रेडियन से$^{-2}$
जड़त्व-आघूर्ण	संहित × (दूरी)^2	L^2M	किग्रा मी^{2}
बल आघूर्ण	जड़त्व आघूर्ण × कोणिक त्वरण	L^2MT^{-2}	न्यू मी
आवृत्ति	आवर्तन संख्या/काल	T^{-1}	से$^{-1}$
पृष्ठ तनाव	बल/लम्बाई	MT^{-2}	न्यू मी$^{-1}$

प्रश्न-अभ्यास

1.1 मात्रकों की सुसंगत पद्धति समझाइये।

1.2 मात्रकों की अन्तर्राष्ट्रीय पद्धति में लिए गए छः मूल-मात्रक कौन से हैं?

1.3 किसी भौतिक मानक के लिए वांछनीय विशेषताएँ कौन-सी होती है?

1.4 लम्बाई के लिए प्रामाणिक छड़ निर्धारित करते समय हमें उस ताप का भी उल्लेख करना होता है जिस पर उस छड़ से माप लिया जाना चाहिए। क्या लम्बाई को मूल मात्रक कहना उचित है जबकि उसके निर्धारण के लिए एक अन्य भौतिक राशि, ताप, का उल्लेख करना आवश्यक होता है?

1.5 प्रकाश के किसी विशेष विकिरण के तरंग-दैर्ध्य की लम्बाई को मानक बनाने से क्या लाभ है?

1.6 क्या किसी कोण का परिमाण लम्बाई के मात्रक के चुनाव पर निर्भर करता है?

1.7 धूप में खड़े किसी पेड़ की ऊंचाई मापने के लिए कोई अप्रत्यक्ष विधि सुझाइये।

1.8 निम्नलिखित लम्बाई के आयामों में से प्रत्येक के अनुरूप एक-एक दूरी सुझाइये।
(i) 10^7 मी (ii) 10^4 मी (iii) 10^3 मी (iv) 10^2 मी (v) 10^{-3} मी (vi) 10^{-6} मी (vii) 10^{-14} मी

1.9 प्रकृति में घटने वाली किन्हीं ऐसी आवर्ती क्रियाओं का उल्लेख कीजिए जिन्हें काल की माप के लिए मानकों के रूप में प्रयुक्त किया जा सके। इनमें से काल का सबसे अधिक उपयुक्त मानक कौन-सा हो सकता है, यह किस आधार पर निश्चित करेंगे?

1.10 भौतिक राशियों को विमीय समीकरणों से व्यक्त करने में क्या लाभ है ? विमाओं के दो उपयोग बताइये ।

1.11 निम्नलिखित समीकरणों में विमीय सामंजस्य की जाँच कीजिए :
(i) $s=v_0t+\frac{1}{2}at^2$ (ii) $v=v_0+at$ (iii) $Fs=\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}mv_0^2$
इनमें s किसी काल t में तय की दूरी है, v_0 और v क्रमशः प्रारम्भिक तथा t काल पर प्राप्त वेग है, a त्वरण, m संहति तथा F प्रयुक्त बल है ।

1.12 किसी माध्यम में ध्वनि का वेग (i) माध्यम के घनत्व d तथा (ii) इसके प्रत्यास्थता गुणांक, E पर निर्भर होना माना जा सकता है । प्रत्यास्थता गुणांक प्रतिबल और विकृति का अनुपात होता है, प्रतिबल प्रति इकाई क्षेत्र पर लगे बल के बराबर होता है ! विमाओं का उपयोग करते हुए ध्वनि के वेग के लिए सूत्र व्युत्पन्न कीजिए ।

1.13 किसी नली में होकर कोई द्रव स्थिर गति से प्रवाहित हो रहा है । यह मान लीजिए कि नली में से प्रति सेकण्ड निःसृत होने वाले द्रव का आयतन (i) द्रव के श्यानता गुणांक, η (ii) नली के अर्ध-व्यास, r (iii) नली के दोनों सिरों के बीच की दाब प्रवणता पर निर्भर करता है । (दाब-प्रवणता नली में इसकी प्रति इकाई लम्बाई पर उत्पन्न दाब-ह्रास को कहते हैं, और इसका मान p/l के बराबर होता है । यहाँ p नली के दोनों सिरों पर लगे दाबों का अन्तर है और l इसकी लम्बाई है ।) श्यानता गुणांक की विमाएं $ML^{-1}T^{-1}$ है ।

विमाओं का उपयोग करते हुए प्रति सेकण्ड निःसृत होने वाले द्रव के आयतन के लिए सूत्र व्युत्पन्न कीजिए ।

अध्याय—2

गति (Motion)

2.1 विस्थापन (Displacement)

किसी पिण्ड के स्थान में परिवर्तन होना, उसका **विस्थापन** कहलाता है। यदि कोई कण गति करता हुआ स्थिति A से स्थिति B में पहुँच जाये (चित्र 2.1), तो इसका विस्थापन $\vec{AB}$ होगा। शीर्ष पर शर-चिन्ह यह प्रदर्शित करने के लिए लगाया गया है कि गति की दिशा A से B की ओर है। यदि कण B से A तक पहुँचे तो इसका विस्थापन $\vec{BA}$ होगा। दोनों दशाओं में विस्थापन का परिमाण तो समान है, किन्तु दिशाएँ एक दूसरे के विपरीत है। अर्थात्

$$\vec{AB} = -\vec{BA} \quad (2.1)$$

A B

चित्र 2.1 विस्थापन सदिश

सदिश ऐसी भौतिक राशि को कहते हैं जिसका परिमाण हो, और साथ ही उसकी दिशा भी हो। विस्थापन इसी प्रकार की एक राशि है। अतः विस्थापन सदिश है। सदिश राशियों के कुछ उदाहरण हैं : वेग, त्वरण, संवेग और बल। सदिश के परिमाण को सदिश के मॉडयूल्स की संज्ञा दी गई है। सदिश $\vec{AB}$ के मॉड्यूल्स को $|\vec{AB}|$ लिखकर प्रदर्शित करते हैं। ऐसी राशि को जिसका केवल परिमाण ही होता है **अदिश** कहते हैं। अदिश के कुछ उदाहरण हैं : लम्बाई, संहति, काल, ऊर्जा और ताप।

2.2 सदिशों का ग्राफीय निरूपण (Graphical representation of vectors)

सदिश को चित्र में एक रेखा में शर-चिन्ह बनाकर दिखाते है। इस रेखा की लम्बाई सदिश के परिमाण के अनुपात में बनाते हैं और इसकी दिकस्थिति सदिश की दिशा में होती है। जैसे, पश्चिम से पूर्व की ओर 4 कि मी के विस्थापन को एक शर-चिन्ह PQ बनाकर निरूपित कर सकते है, जिसकी लम्बाई 4 से मी पश्चिम से पूर्व की ओर है और जिस पर लगा शराग्र पूर्व की ओर है (चित्र 2.2)।

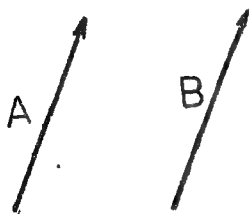
4cm

P Q

चित्र 2.2 सदिश का ग्राफीय निरूपण

गणितीय प्रतीक के रूप में सदिश का निरूपण एक अक्षर द्वारा, उस के शीर्ष पर एक शर-चिन्ह बनाकर, कर सकते हैं जैसे $\vec{A}$ अथवा, केवल एक मोटे टाइप के अक्षर,

जैसे **A** द्वारा भी इसका निरूपण कर सकते हैं। दूसरा प्रकार छपाई के लिए ठीक है, परन्तु लिखने में तो पहला प्रकार अर्थात्, शीर्ष पर शर चिन्हित अक्षर ही सुविधा-जनक रहता है। सदिश के परिमाण और अदिश का निरूपण करने के लिए महीन टाइप या तिरछे टाइप वाले अक्षरों का प्रयोग किया जाता है।

दो सदिश भौतिक राशियाँ तभी बराबर होती है जब उनके परिमाण बराबर हों और वे एक ही दिशा में हों। जैसे, चित्र 2.3 में दिखाए गये सदिश **A** और **B** बराबर है।

चित्र 2.3 दो बराबर सदिश

चित्र 2.4 में दिखाये गए सदिश **C** और **D** परिमाण में बराबर परन्तु विपरीत दिशाओं में हैं। अतः,

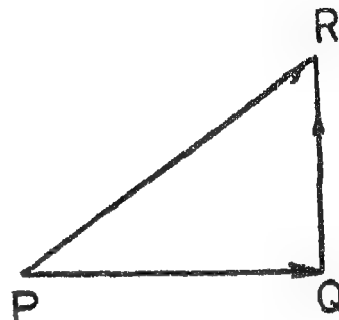
$$\mathbf{C}=-\mathbf{D}$$

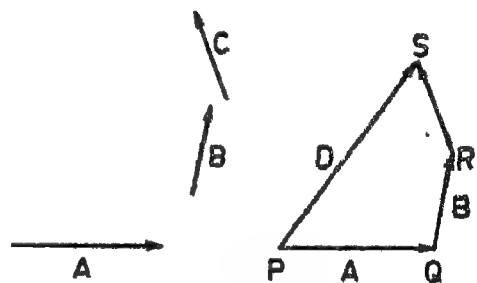
चित्र 2.4 परिमाण बराबर किन्तु विपरीत दिशाओं के सदिश

2.3 सदिशों का जोड़ना और घटाना (Addition and subtraction of vectors)

माना कि कोई कण प्रारम्भ में P पर है। यह 4 मी पूर्व की ओर, और फिर 3 मी उत्तर की ओर विस्थापित हुआ।

इस प्रकार इसकी अन्तिम स्थिति R पर हुई (चित्र 2.5)। अतः इसका परिणामी विस्थापन $\vec{PR}$ हुआ। यह स्पष्ट है, कि यद्यपि कण कुल मिलाकर 7 मी चला है, तथापि इसके विस्थापन का परिमाण 5 मी है। सदिश निरूपण में हम इसे यो लिखेंगे :

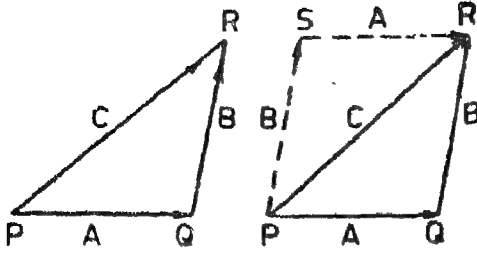
$$\vec{PQ}+\vec{QR}=\vec{PR}$$

चित्र 2.5 दो सदिशों का जोड़ना

तीन सदिशों को भी इसी प्रकार जोड़ा जा सकता है। चित्र 2.6(a) में सदिश **A**, **B** और **C** दिखाए गए है। इनका योग चित्र 2.6 (b) में दिखाया गया है।

(a) (b)

चित्र 2.6 तीन सदिशों का जोड़ना

इसमें PQ, QR और RS क्रमशः सदिश **A**, **B** और **C** का निरूपण करते हैं, और परिणामी सदिश PS सदिश **D** के लिए है। अतः

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}+\mathbf{C}=\mathbf{D}$$

चित्र 2.7 (a) में $\mathbf{C}=\mathbf{A}+\mathbf{B}$। चित्र 2.7 (b) में समांतर-चतुर्भुज PQRS को देखिए। त्रिभुज PSR मे

चित्र 2.7 सदिशों का क्रम विनिमेय नियम

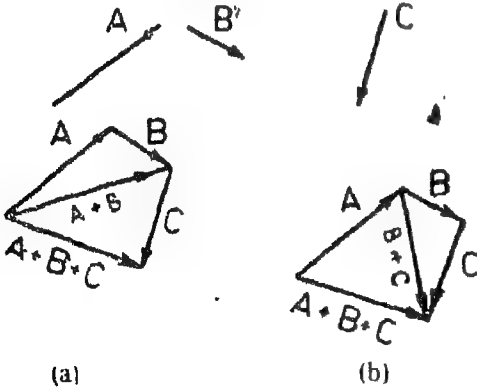
भुजा PS सदिश **B** को निरूपित करती है, और भुजा SR सदिश **A** को। PR भुजा—सदिश **C** को निरूपित करती है। अतः, **B**+**A**=**C**। किन्तु हम देख चुके हैं, कि **C**=**A**+**B** अतः,

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A} \qquad (2.2)$$

अतः सिद्ध हुआ कि दो सदिशों **A** और **B** को जोड़ने में उनके क्रम का कोई महत्त्व नहीं है। यह **संचयन का नियम** है।

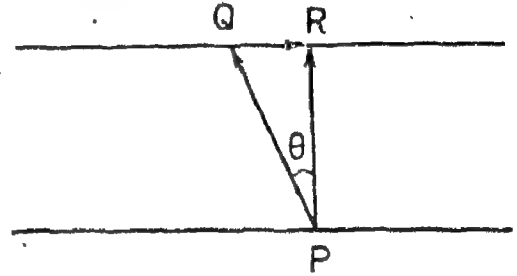
कल्पना कीजिए कि तीन सदिश **A**,**B** और **C** हैं। यदि हम पहले **A** और **B** को जोड़ें और फिर योगफल में **C** जोड़ दें तो फल वही प्राप्त होगा जो **B** और **C** के योग में **A** को जोड़ने से प्राप्त होता है। अर्थात,

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}=\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C}) \qquad (2.3)$$

यह साहचर्य का नियम है।

चित्र 2.8 सदिशों का साहचर्य नियम

चित्र 2.8 (a) और (b) में सदिशों के साहचर्य के नियम को समझाया गया है।

उदाहरण 2.1

नदी के एक किनारे के स्थान P पर स्थित एक व्यक्ति दूसरे किनारे अपने ठीक सामने के स्थान R पर नाव से पहुँचना चाहता है (चित्र 2.9)। यदि वह व्यक्ति शांत जल में 6 कि मी प्रति घंटा की रफ्तार से नाव खे सकता हो, तो बताइये कि R तक पहुँचने के लिए वह नदी में नाव किस दिशा में खेवे।

चित्र 2.9 नदी में गति दर्शाती सदिश आकृति

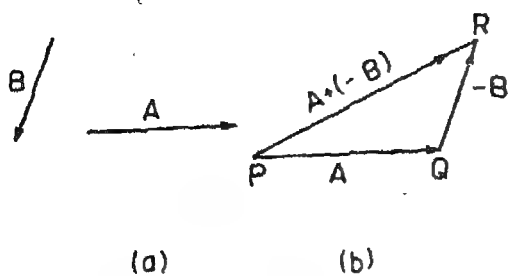
माना कि नाव खेये जाने की दिशा PQ है। नाव के वेग और नदी के वेग के योग से प्राप्त वेग सदिश की दिशा PR होनी चाहिए। यदि $\vec{PQ}$ 6 कि मी/घंटा और $\vec{QR}$ 3 कि मी/घंटा के परिमाण के सदिश निरूपित करते हों तो $\vec{PR}$ परिणामी वेग के सदिश का निरूपण करेगा। त्रिभुज PQR में

$$\text{Sin } \theta=\frac{QR}{PQ}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

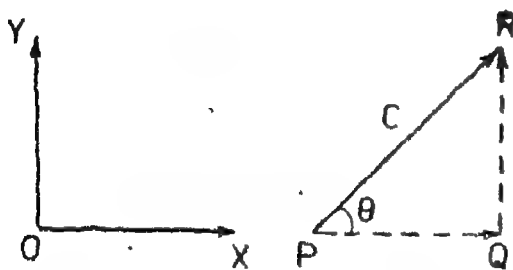
अतः, $\theta=30°$

नाव को नदी में PR से 30° का कोण बनाती हुई दिशा PQ में खेना चाहिए।

अब कल्पना कीजिए किसी सदिश **B** को सदिश **A** में से घटाना है, (चित्र 2.10 a)। चित्र 2.10 (b) में PQ और QR क्रमशः सदिश **A** और —**B** को निरूपित करते हैं। PR, **A** और—**B** के योग, अर्थात् सदिश **A** — **B** को निरूपित करेगा।

नोट : यह उल्लेखनीय है कि जोड़ना और घटाना केवल उन्हीं सदिशों में सम्भव है, जो एक ही भौतिक राशि को निरूपित करते हों।

चित्र 2.10 एक सदिश को दूसरे सदिश से घटाना

2.4 सदिश का किन्हीं दो निर्धारित दिशाओं में वियोजन (Resolution of a vector in two specified directions)

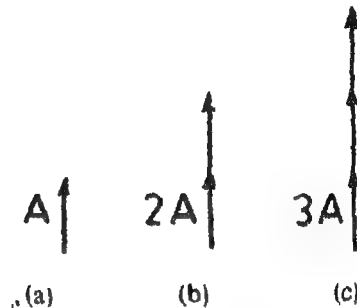
माना कि C कोई सदिश है (चित्र 2.11), जिसे किन्हीं दो परस्पर लंब दिशाओं—X और—Y में वियोजित करना है। सदिश C के एक छोर P से एक रेखा X—दिशा के समान्तर, तथा दूसरे छोर R से एक रेखा Y—दिशा के समान्तर खींचिये।

चित्र 2.11 दो अभिलम्ब दिशाओं में किसी सदिश का वियोजन

ये रेखाएँ Q बिन्दु पर परस्पर काटती हैं। चित्र से स्पष्ट है, कि PQ, X—दिशा के समान्तर घटक **A** को, और QR, Y—दिशा के समान्तर घटक **B** को निरूपित करता है।

इस प्रकार की ज्यामितीय रचना द्वारा सदिश C को किन्ही भी दो निर्धारित दिशाओं में वियोजित कर के उसके घटकों को निकाल सकते हैं।

चित्र 2.11 में यदि C, X—दिशा के साथ θ कोण बनाता है तो घटकों के परिमाण

$|A| = |C| \cos\theta$

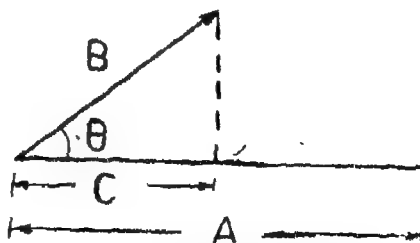
और $|B| = |C| \sin\theta$ होंगे।

चित्र 2.12 किसी अदिश और सदिश में गुणन

2.5 सदिश का अदिश में गुणा (Multiplication of vector by scalar)

यदि किसी सदिश **A** को किसी अदिश n से गुणा करें तो गुणनफल n**A** होगा। यह एक सदिश है, जिसकी दिशा वही है जो **A** की है और परिमाण **A** के परिमाण का n गुना है। चित्र 2.12 (b) और (c) में n का मान क्रमश: 2 और 3 है।

2.6 दो सदिशों का अदिश गुणनफल (Scalar product of two vectors)

दो सदिशों **A** और **B** का **अदिश** (या डॉट) **गुणनफल** परिभाषानुसार उन दोनों सदिशों के परिमाणों और उनके मध्य बनने वाले कोण की कोज्या का गुणनफल होता है। अर्थात्,

$$\mathbf{A}.\mathbf{B} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}| \cos\theta \qquad (2.4)$$

चित्र 2.13 दो सदिशों का अदिश गुणनफल
(A.B)=AB cos θ, C=B cos θ

दो सदिशों का डॉट-गुणनफल अदिश राशि होती है। यदि दोनों के बीच का कोण θ, 90° का हो, तो उन सदिशों का डॉट-गुणनफल शून्य होगा, क्योंकि cos 90°=0। यदि θ=0° तो डॉट-गुणनफल सदिशों के परिणामों का गुणनफल होगा। डॉट-गुणनफल को ऐसे भी समझ सकते हैं, कि यह सदिश **A** के परिमाण और सदिश **B** के **A** पर प्रक्षेप (चित्र 2.13 में **C**) के परिमाण का गुणनफल है। या सदिश **B** के परिमाण और **A** के **B** पर प्रक्षेप के परिमाण का गुणनफल है।

अदिश गुणन में सदिशों के क्रम का कोई महत्व नहीं होता, क्योंकि कोण की कोज्या का मान दोनों ही क्रमों में समान रहता है।

2.7 दो सदिशों का सदिश गुणनफल (Vector product of two vectors)

दो सदिशों का गुणा इस प्रकार भी किया जा सकता है कि गुणनफल एक सदिश राशि हो। इस प्रकार के गुणनफल को **सदिश** (या **क्रास**) गुणनफल कहते हैं।

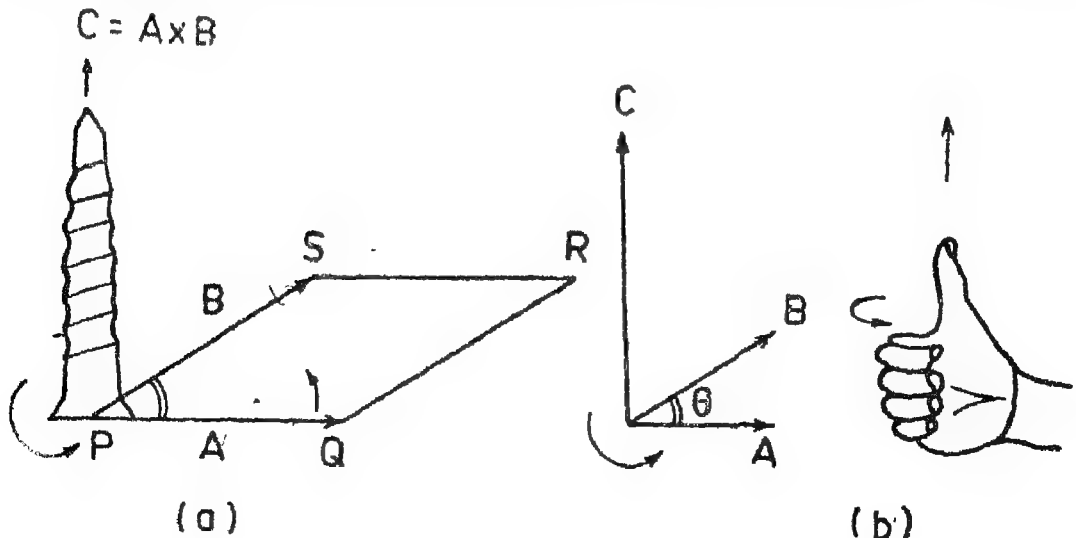
यदि दो सदिशों **A** और **B** का सदिश गुणनफल **C** हो तो इसे ऐसे लिखेंगे : **A**×**B**=**C** और इसे पढ़ेंगे : **A** क्रॉस **B** बराबर **C**।

यदि दो सदिशो **A** और **B** के बीच कोण θ हो, तो उनके सदिश गुणनफल से प्राप्त सदिश **C** का परिमाण होगा।

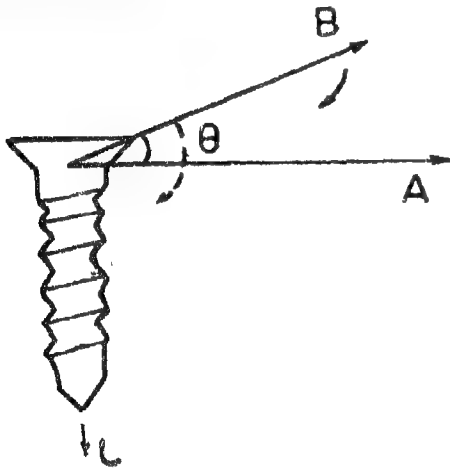
$$|\mathbf{C}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}| \,.\, \text{Sin}\,\theta \qquad (2.5)$$

C की दिशा उस समतल के लम्ब होगी जिसमें **A** और **B** हैं, और **A, B, C**, तीनों मिलकर एक दक्षिणावर्त निर्देशाँक-पद्धति बनायेंगे।

C की दिशा जानने की एक सरल विधि यह है। कल्पना कीजिए कि एक दक्षिणावर्त पेंच (चित्र 2.14 a) को इस प्रकार रखा है कि उसका अक्ष उस समतल के लम्ब है जिसमें सदिश **A** और **B** हैं। अब इस पेंच को इस प्रकार घुमायें कि यह **A** से **B** की ओर θ कोण के अनुसार घूमे। जिस दिशा में पेंच बढ़ेगा वही **C** की दिशा होगी। चित्र में इसकी दिशा ऊपर की ओर है।

दिशा जानने की एक और भी विधि है। दायें हाथ को इस प्रकार रखिये जैसे चित्र 2.14 (b) में दिखाया है: अँगूठा सीधा और अँगुलियाँ मुट्ठी बनाकर मुड़ी हुई। अँगूठे को उस समतल के लम्ब रखिए जिसमें सदिश **A** और **B** है। यदि अँगुलियों की मुड़ने की दिशा **A** से **B** की ओर घूर्णन को इंगित करे तो अंगूठा गुणनफल सदिश **C** की दिशा बतायेगा। इस सदिश का परिमाण **A** और **B** की आसन्न-भुजाओं से बनाये गए समांतर चतुर्भुज PQRS (चित्र 2.14 a) के क्षेत्रफल के बराबर होगा।

चित्र 2.14. दो सदिशों का सदिशीय अथवा वज्र गुणनफल

क्या A×B और B×A समान हैं ?

B×A के गुणनफल से प्राप्त सदिश का परिमाण तो A×B के गुणनफल-सदिश C के परिमाण के बराबर होगा; किन्तु, दक्षिणावर्त पेंच के नियम के अनुसार, पेंच को B से A की ओर θ कोण बनाते हुए घुमायें तो यह, जैसा चित्र 2.15 में दिखाया गया है, नीचे की ओर बढ़ेगा। यह सदिश A और B के साथ एक वामावर्त निर्देशांक पद्धति बनायेगा अर्थात् यह A×B की विपरीत दिशा में होगा।

चित्र 2.15 सदिशों के क्रम मे परिवर्तन करने पर सदिशीय गुणनफल का चिन्ह परिवर्तित हो जाता है $\mathbf{A}\times\mathbf{B}=-\mathbf{B}\times\mathbf{A}$

अतः यह स्पष्ट है कि गुणक सदिशो का क्रम उलट देने से सदिश गुणनफल का चिन्ह उलट जाता है अर्थात्,

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=-\mathbf{B}\times\mathbf{A} \tag{2.6}$$

सदिश गुणनफल का, इस अर्थ में, अदिश गुणनफल से वैषम्य है, क्योंकि अदिश गुणनफल मे सदिशों का क्रम उलट देने से गुणनफल में कोई अन्तर नहीं पड़ता।

चुम्बकीय क्षेत्र में गतिमान विद्युत् आवेश पर लगने वाला बल सदिश गुणनफल से प्राप्त राशि का एक उदाहरण है।

2.8 गतिविज्ञान (Kinematics)

गतिविज्ञान का प्रयोजन गति के कारणों पर विचार न करते हुए गति का अध्ययन करना है। नित्य-प्रति के जीवन में हमें तीन प्रकार की गति दिखाई पड़ती है। रैखिक-गति, जिसमें किसी पिण्ड की गति सरल रेखा में होती है (जैसे, सड़क पर चलती हुई कार), घूर्णन-गति, जिसमें पिण्ड किसी निश्चित अक्ष के चारो ओर घूर्णन करता है (जैसे, गाड़ी का पहिया या बिजली के पंखे के फलक जो अपनी धुरी पर घूमते है), और कम्पन-गति या दोलन-गति, जैसी किसी झूले या घड़ी के पैण्डुलम में होती है। इस अध्याय में हम पिण्ड की रैखिक-गति पर विचार करेंगे और सरलता के लिए पिण्ड को एक कण मान लेंगे।

2.9 वेग (Velocity)

विस्थापन की दर को वेग कहते हैं। क्योंकि विस्थापन सदिश है, अतः वेग भी सदिश है। इसमें परिमाण और दिशा दोनों होती हैं। वेग की विमाएँ LT^{-1} है।

किसी काल-बिन्दु पर किसी कण का वेग ज्ञात करने के लिए, किसी एक अत्यन्त छोटे काल-अन्तराल $\triangle t$ में हुए विस्थापन $\triangle \mathbf{s}$ को निकालना चाहिए। तब, उस काल-बिन्दु पर, जो $\triangle t$ काल-अन्तराल के मध्य का काल है, वेग का मान $\triangle \mathbf{s}/\triangle t$ होगा। यह काल-अन्तराल जितना ही छोटा होगा उतना ही यथार्थ $\triangle \mathbf{s}/\triangle t$ तात्क्षणिक वेग का मान होगा।

अतः, तात्क्षणिक वेग—

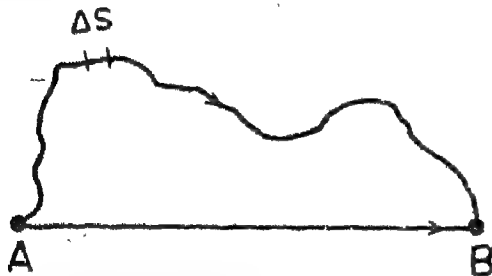
$$\mathbf{v}=\lim_{\triangle t\to 0}\frac{\triangle \mathbf{s}}{\triangle t}=\frac{d\mathbf{s}}{dt}$$

यहाँ, $\frac{d\mathbf{s}}{dt}$—विस्थापन $\mathbf{s}$ का $\mathbf{t}$ के प्रति अवकलन है

यदि किसी कण के बराबर काल-अन्तरालों में हुए विस्थापन बराबर हों, चाहे, वे काल अन्तराल कितने ही छोटे क्यों न हों, तो कण का वेग **एक समान** कहलाता है।

माना कि कोई कण 60 कि मी प्रति घंटा के एक-समान वेग से किसी एक दिशा, जैसे पूर्व की ओर गतिमान है। इसका आशय यह है कि कण की गति की दिशा लगातार वही, अर्थात् पूर्व ही, बनी रहती है और प्रति आधे घण्टे में यह 30 कि मी, प्रति मिनट में 1 कि मी, प्रति सेकण्ड में 1/60 कि मी और प्रति सेकण्ड के सौवें भाग में 1/6000 किमी चलता है। इससे भी छोटे काल के अन्त-

राल लें तो उनमें से प्रत्येक में भी तय की दूरी समान ही होगी। एकसमान वेग का यह अर्थ है।

यदि किसी कण का वेग एकसमान न हो तो उसके द्वारा तय की गई कुल दूरी में अवधि का भाग देकर कण का औसत वेग ज्ञात होता है। माना कि एक कण किसी काल-अवधि t में किसी विषम पथ पर चलकर स्थिति A से B तक पहुंचता है (चित्र 2.16) तो, यह सिद्ध किया जा सकता है कि उस कण का औसत वेग $\mathbf{v}_{av}$ कण के सदिश फासले **AB** को अवधि t से भाग देकर प्राप्त किया जा सकता है।*

चित्र 2.16 परिवर्तनशील वेग के साथ किसी कण का गमन। टुकड़ा ऊर्ध्वाधर दिशा में ऊपर को फेंका जाता है। टुकड़े के मार्ग को तीर द्वारा दिखाया गया है।

इस अध्याय में हम अपना अध्ययन केवल एक आयामीय गति, अर्थात्, सरल रैखिक गति, तक ही सीमित रखेंगे।

2.10 त्वरण (Acceleration)

यदि किसी पिण्ड के वेग में कालानुसार परिवर्तन हो रहा हो, तो हम कहते है कि उस पिण्ड पर त्वरण लग रहा है। वेग का परिवर्तन उसके परिमाण में अथवा उसकी दिशा, अथवा दोनों में ही हो सकता है। **वेग के कालानुसार परिवर्तन की दर को त्वरण कहते हैं।**

यदि किसी काल-अन्तराल $\triangle t$ में कणे के वेग में परिवर्तन $\triangle \mathbf{v}$ हो, तो उसका त्वरण

$$\mathbf{a}=\frac{\triangle \mathbf{v}}{\triangle t}$$

क्योंकि $\triangle \mathbf{v}$ सदिश है, अतः त्वरण **a** भी सदिश हुआ।

यदि त्वरण असमान हो तो किसी काल-बिन्दु t पर उसका तात्क्षणिक मान

$$\mathbf{a}=\underset{\triangle t\to 0}{\mathrm{Lt}}\frac{\triangle \mathbf{v}}{\triangle t}=\frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

यदि वेग में कालानुसार परिवर्तन एकसमान हो, तो त्वरण $\left(=\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right)$ का मान एक अचर राशि होगी। त्वरण की विमाएँ LT^{-2} हैं।

ऋणात्मक त्वरण मन्दन कहलाता है। यदि किसी कार का वेग बढ़ रहा हो, तो हम कहते हैं कि कार त्वरित है। यदि इसका वेग कम हो रहा हो, तो इसकी गति में मन्दन हो रहा है, अथवा हम कहते हैं कि कार अवत्वरित है।

2.11 गति-समीकरण (Equation of motion)

रेखीय गति में किसी कण की कल्पना कीजिए। माना कि इस पर एकसमाव त्वरण **a** लग रहा है। तब,

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\mathbf{a}$$

या, $d\mathbf{v}=\mathbf{a}dt$

दोनों ओर समाकलन करने पर

$$\int d\mathbf{v}=\mathbf{a}\int dt$$

या, $\mathbf{v}=\mathbf{a}t+k$

इसमें k कोई समाकलन-अचर है। यदि $\mathbf{v}_i$ और $\mathbf{v}_f$ कण की किसी काल-अवधि t के प्रारम्भ और अन्त के वेग है, तब,

$t=0$ पर $\mathbf{v}_f=\mathbf{v}_i$

अतः $k=\mathbf{v}_i$

अतः $\mathbf{v}_f=\mathbf{v}_i+\mathbf{a}t$

किसी भी काल-बिन्दु t पर वेग **v** का मान

$\mathbf{v}=\mathbf{v}_i+\mathbf{a}t$

अनन्त सूक्ष्म कालान्तर dt में, जिसमें वेग **v** का मान

---

*औसत वेग की परिभाषा के अनुसार

$$\mathbf{v}_{av}=\frac{\Sigma\mathbf{v}\Delta t}{\Sigma\Delta t}=\frac{\int\mathbf{v}dt}{\int dt}=\frac{1}{t}\int\mathbf{v}dt$$

समीकरण (2.7) से v का मान रखने पर

$$\mathbf{v}_{av}=\frac{1}{t}\int\frac{d\mathbf{s}}{dt}dt=\frac{1}{t}\int d\mathbf{s}=\frac{\mathbf{AB}}{t}$$

एकसमान माना जा सकता है, कण द्वारा तय की गई दूरी का मान

$ds = v\,dt = (v_i + at)\,dt$

होगा। समाकलन करने पर

$\int ds = \int (v_i + at)\,dt$

अर्थात्

$s = v_i t + \frac{1}{2}at^2 + k^1$

किन्तु, क्योंकि t=0 होने पर s=0 अत: $k^1 = 0$ अत:,

$$s = v_i t + \frac{1}{2}at^2 \qquad (2.10)$$

समीकरणों (2.9) और (2.10) में t को लुप्त करने पर

$$v_f^2 = v_i^2 + 2as \qquad (2.11)$$

ये तीन समीकरण (2.9), (2.10) और (2.11), तीन चर राशियों v, s और t में से दो-दो के बीच सम्बन्ध स्थापित करने वाले तीन सम्भव समीकरण हैं।

स्वतन्त्र गिरते हुए किसी पिण्ड पर लगने वाला त्वरण गुरुत्व जनित होता है, इसके प्रतीक के लिए 'g' लिखते हैं। इसका मान पृथ्वी पर स्थान-स्थान पर भिन्न होता है।

उदाहरण 2.2

एक कार 72 किमी/घंटा के वेग से उत्तर की ओर जा रही है। ब्रेक लगाकर इसे 4 सेकण्ड में रोक दिया गया। यह मानकर कि इस पर लगाया गया अवत्वरण एकसमान रहा, इसका मान ज्ञात कीजिए। ब्रेक लगाने के क्षण से रुकने तक कार कितनी दूर चली होगी ?

कार का आरम्भिक वेग,

$$v_i = 72 \text{ किमी/प्रति घंटा} = \frac{72 \times 1000}{60 \times 60} = 20 \text{ मी/से}$$

क्योंकि, यह रोक दी गयी है, अत: अन्तिम वेग, $v_f = 0$

माना कि इस अवधि में लगा त्वरण a है। समीकरण (2.9) में v_f, v_i और a का मान रखने पर

$0 = 20 + 4a$

अत:, $a = -5$ मी $से^{-2}$

कार पर अवत्वरण 5 मी $से^{-2}$ का है।

v_f, v_i और a का मान समीकरण (2.11) में रखने पर

$$0 - (20)^2 = 2(-5) \times s$$

अत.

$$s = 40 \text{ मी}$$

ब्रेक लगाने के बाद रुकने तक कार 40 मी दूर चलेगी।

उदाहरण 2.3

39.2 मीटर ऊँचे किसी बहुतल भवन की चोटी से एक लड़के ने एक ढेला 9.8 मी $से^{-1}$ के वेग से सीधा ऊपर इस प्रकार फेंका कि वह अन्तत. भूमि पर गिरे। ज्ञात कीजिए, कि

(1) ढेला भूमि पर कितनी देर में गिरेगा ?

(2) कितनी देर बाद यह फेंकने के स्थान से होकर जायेगा ? और

(3) भूमि से टकराते समय इसका वेग कितना होगा ?

(g का मान 9.8 मी $से^{-2}$ मानिये)

इन प्रश्नों को हल करते समय प्रयुक्त राशियों की दिशा का ध्यान रखना चाहिए। ऊर्ध्व दिशा की राशियों के लिए + चिन्ह और अधो दिशा की राशियों के लिए — चिन्ह का प्रयोग कर सकते हैं।

1 भूमि तक पहुंचने में ढेला अधो दिशा में वास्तविक 39.2 मी दूरी तय करता है।

अत: $s = -39.2$ मी

$g = -9.8$ मी $से^{-2}$

$v_i = 9.8$ मी $से^{-1}$

s, g और v_i के ये उपरिलिखित मान समीकरण (2.10) में रखने पर

$$-39.2 = 9.8 \times t - \tfrac{1}{2}.9.8 \times t^2$$

इस समीकरण को हल करने पर प्राप्त हुआ

$$(t-4)\,(t+2) = 0$$

अर्थात्

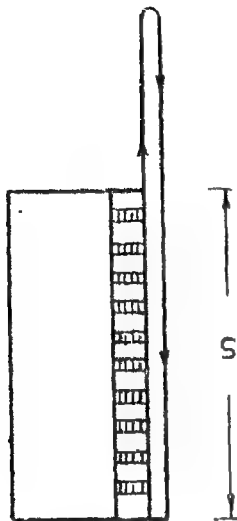
$t = 4$ या -2

t का ऋणात्मक मान स्वीकार्य नहीं है।

फेंके जाने के 4 सेकण्ड बाद ढेला भूमि पर पहुंचता है।

(2) जिस समय यह फेंके जाने के स्थान से होकर जाता है उस समय इसका कुल विस्थापन शून्य है।

अत: समीकरण (2.10) के अनुसार

$$0 = 9.8 \times t - \tfrac{1}{2} \times 9.8 \times t^2$$

चित्र 2.17 एक बहुतलीय इमारत की छत से पत्थर का एक ढेला ऊपर की ओर फेंका जाता है। टुकड़े के मार्ग को तीर द्वारा दिखाया गया है

अर्थात्, $(t-2)t=0$

अतः, $t=0$ या 2

$t=0$ का अर्थ हुआ गति के प्रारम्भ का काल

ढेला फेंके जाने के 2 सेकण्ड बाद अपने प्रेक्षण स्थान से होकर जायेगा।

(3) माना कि भूमि से टकराते समय इसका वेग v_f है। समीकरण (2.9) से

$v_f = 9.8 - 9.8 \times 4$

अतः, $v_f = -29.4$ मी से$^{-1}$

ऋण-चिन्ह से अभिप्राय है कि वेग नीचे की ओर है।

उदाहरण 2.4

किसी हैलिकॉप्टर से, जो 2 मी से$^{-1}$ के वेग से सीधा ऊपर उठ रहा है, खाद्यान्न का एक पैकेट गिराया गया। ज्ञात कीजिये, कि 2 सेकण्ड बाद

(1) पैकेट का वेग कितना होगा ? और

(2) यह हैलिकॉप्टर से कितना नीचे होगा ?

(g का मान 9.8 मी से$^{-2}$ है।)

इस उदाहरण में $v_i = 2$ मी से$^{-1}$, $g = -9.8$ मी से$^{-2}$ और $t = 2$ सेकण्ड है।

(1) समीकरण (2.9) में रखने पर

$v_f = 2 - 2 \times 9.8 = -17.6$ मी से$^{-1}$ पैकेट का वेग 2 सेकण्ड बाद नीचे की ओर 17.6 मी से$^{-1}$ होगा।

(2) समीकरण (2.11) में v_i, v_f और g का मान रखने पर

$(-17.6)^2 = (2)^2 - 2 \times 9.8 \times s$

इस समीकरण को हल करने पर

$s = -15.6$ मी प्राप्त हुआ।

किन्तु 2 सेकण्ड में हैलिकॉप्टर पैकेट गिराये जाने के स्थान से 4 मी ऊपर उठ चुका है।

अतः, पैकेट हैलिकॉप्टर से 19.6 मी नीचे है।

2.12 न्यूटन का गति का प्रथम नियम (Newton's first law of motion)

यह एक सामान्य अनुभव की बात है कि यदि कोई पिण्ड विश्रान्त स्थिति में है तो यह उसी स्थिति में तब तक बना रहेगा जब तक कि कोई बाहरी शक्ति उसे न छेड़ें।

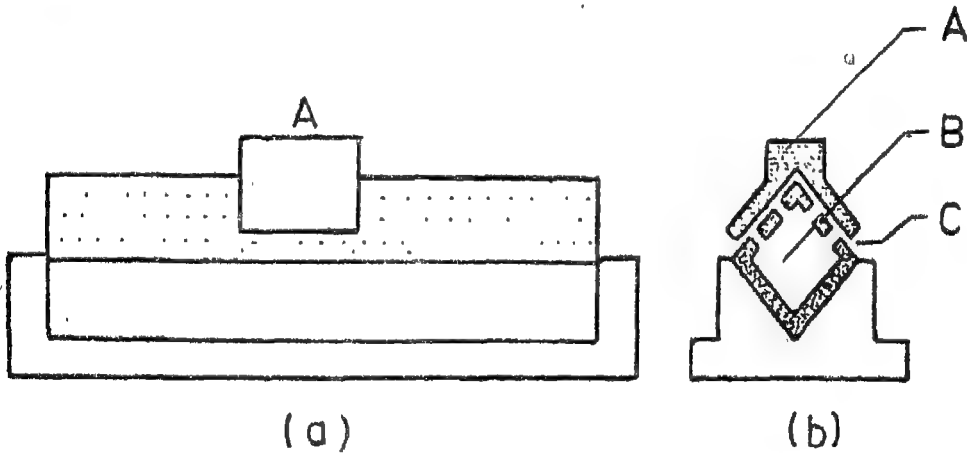
अब जरा गतिशील पिण्डों पर विचार करें। यूनानी दार्शनिक अरस्तु (384-322 ई०पू०) ने कहा था कि किसी पिण्ड को एकसमान वेग से चलाए रखने के लिए उस पर एकसमान बल निरन्तर लगाये रखना पड़ेगा। लगभग दो हजार वर्षों तक किसी ने उसके कथन का विरोध नहीं किया। गैलीलियो (1564-1642) ने सर्वप्रथम नत तल पर गति का अध्ययन करके यह निष्कर्ष निकाला कि यदि किसी पिण्ड को आरम्भ में कोई वेग दे दिया जाय, तो जब तक कोई बल उस पिण्ड पर न लगे, वह उसी वेग से चलता रहेगा। यह बात चिकने क्षैतिज समतल पर गतिमान पिण्ड के विषय में भी सही है। गैलीलियो ने अपने प्रयोगों में देखा कि यदि समतल चिकना हो तो उस पर कोई पिण्ड खुरदुरे समतल की अपेक्षा अधिक देर तक बहुत कुछ एकसमान वेग से चलेगा। इससे उन्होंने यह निष्कर्ष निकाला कि आदर्श स्थिति प्राप्त होने पर क्षैतिज समतल पर गति निरंतर बनी रहेगी।

वास्तव में ऐसे सर्वथा चिकने समतल दुष्प्राप्य है जिन पर गतिमान पिण्ड किसी प्रकार के घर्षण प्रतिरोध का अनुभव न करे।

"रेखीय वायु लीक" (चित्र 2.18) करीब-करीब घर्षण-हीन लीक होती है। यह चित्र 2.18 (a) में दिखाये आकार की एल्युमिनियम की एक खोखली नली होती है। नली के ऊपरी सिरे पर बहुत सारे छोटे-छोटे छिद्र कर दिए जाते है। किसी वायु संपीडक से दबी हवा इस नली के एक छोर से भेजी जाती है। छोटे छिद्रों से निकलती हुई वायु लीक पर रखी गाडी के नीचे एक "वायु का गद्दा" बना देती है, (चित्र 2.18 b)। एक धक्का दे देने से गाड़ी इस वायु-गद्दे के ऊपर तैरती हुई सी चलने लगती है। इस विधि के द्वारा संस्पर्श में आने वाले तलों के बीच घर्षण का लगभग निरस्त कर दिया जाता है।

वायुलीक को क्षैतिज[1] रखकर गाडी को धक्का देने के बाद, गाडी की गति को समान अवधि के लघु अन्तरालों वाले कौंध-प्रकाश-फोटो-ग्राफों[2] द्वारा चित्रित कर लिया जाता है। प्राप्त चित्रों से इन समान अन्तरालों में तय की गई दूरी का अनुमान कर लिया जाता है। ये सभी दूरियां बराबर पाई जायेंगी, जिससे सिद्ध होता है कि गाड़ी एकसमान वेग से चली। इस प्रकार, जब सभी बाह्य बल, जिनमें घर्षण भी है, निरस्त कर दिए जाएँ तो कोई भी गतिशील पिण्ड एकसमान रेखीय गति से चलता रहेगा। निष्कर्षत:, हम कह सकते है कि प्रत्येक पिण्ड जब तक उस पर कोई बाह्य बल न लगे, स्वभावत: अपनी निजी स्थिति-विश्रान्ति की स्थिति या एकसमान रेखीय गति की स्थिति में ही रहता है। पिण्डो के इस गुण को जड़त्व कहते है। गैलीलियो ने सर्वप्रथम इस गुण को पहचाना था। गैलीलियो के जड़त्व के नियम में यह अभिप्रेत है, कि जब पिण्ड पर कोई बल न लग रहा हो, तो, यदि यह पहले मे विश्रान्ति की स्थिति में था, तो विश्रान्त ही ही रहेगा, और यदि पहले ही यह एकसमरेखीय-गति में था तो उसी एकसमरेखीय-गति में चलता रहेगा।

गैलीलियो के बाद न्यूटन (1642-1727) ने गति का व्यवस्थित अध्ययन किया और गैलीलियो के विचारों का विकास किया। उन्होंने गति के तीन नियम स्थापित किए जो उनके नाम से विख्यात हैं। गति का पहला नियम निम्नलिखित है :

जब तक किसी बाह्य बल के प्रभाव से किसी पिण्ड

चित्र 2.18 रेखीय वायु मार्ग उपकरण (A=गाड़ी, B=दबी वायु, C= हवा की फिल्म)

1. वायु लीक को क्षैतिज रखने से गुरुत्व बल नहीं लगेगा।

2. किसी घटना के एक ही फिल्म पर काल के एकसमान अन्तराल देते हुए अनुक्रम मे अनेक चित्र कौध-प्रकाश फोटोग्राफी के द्वारा ऐसे खीचे जा सकते है: अन्धेरे में कैमरे का शटर खोल देते है। फिर, जिस घटना वस्तु के फोटो लेने हो, उसे जल्दी जल्दी कौंधने वाले प्रकाश से आलोकित करते है। यह कौध इलेक्ट्रॉनिकी कौध-बल्ब से उत्पन्न की जा सकती है। घटना सम्पन्न होने के बाद शटर बन्द कर देते है।

को अपनी स्थिति बदलनी न पड़े, वह अपनी विश्रान्ति की, अथवा एकसम-रेखीय-गति की स्थिति को बनाये रखता है। वस्तुतः, यह गेलीलियो के जड़त्व के नियम का पुर्नकथन है।

नित्यप्रति के जीवन में हम जड़त्व के अनेक उदाहरण पा सकते हैं। जड़त्व ही के कारण चलती बस के एकदम से रुकने पर यात्रियों को आगे की ओर झटका लगता है। खड़े हुए यात्री तो गिर भी सकते हैं। ऐसा इसलिए होता है कि—जड़त्व के नियम के अनुसार—उनके पैर तो बस के रुकने से विश्रान्ति की स्थिति में आ जाते हैं। परन्तु शरीर का शेष भाग आगे की ओर अपनी निजी गति की स्थिति में ही रह जाता है। यही कारण है कि चलती गाड़ी से उतरता हुआ व्यक्ति गाड़ी के चलने की दिशा में गिरने लगता है।

2.13 न्यूटन का गति का द्वितीय नियम (Newton's second law of motion)

गतिशील पिण्ड में सवेग होता है। सवेग पिण्ड की संहति और वेग के गुणनफल को कहते हैं यदि पिण्ड की संहति m हो और उसकी रैखिक गति का वेग **v** हो तो इसका रेखीय सवेग **p** होगा।

$$\mathbf{p}=m\mathbf{v} \qquad (2.12)$$

क्योंकि वेग **v** सदिश है, अतः रेखीय संवेग **p** भी एक सदिश राशि है, और इसकी दिशा वेग की दिशा के समान होती है।

यदि किसी पिण्ड पर कोई बल लगे तो इसका वेग बदल जायेगा, फलतः इसके संवेग में भी परिवर्तन हो जायेगा। माना कि एक ही बल भिन्न-भिन्न सहतियों के कई पिण्डों पर समान अवधि तक लगाया जाता है। किसी अधिक संहति के पिण्ड पर हुआ वेग-परिवर्तन उससे कम संहति के पिण्ड पर हुए वेग परिवर्तन की तुलना में कम होगा। परन्तु, यदि हम सवेग परिवर्तन को देखें तो वह सभी पिण्डों पर समान ही होगा।

न्यूटन ने सवेग परिवर्तन की दर के विषय में अपना द्वितीय नियम इस प्रकार व्यक्त किया :

किसी पिण्ड के संवेग-परिवर्तन की दर उस पर लगे बल के समानुपाती होती है, और यह बल की दिशा में होता है।

पिण्ड के सवेग की परिभाषा समीकरण (2.12) के अनुसार है।

समीकरण (2.12) को काल के प्रति अवकलित करने पर,

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt}=\frac{d\,(m)\mathbf{v}}{dt}$$

$$=\frac{m\,d\mathbf{v}}{dt}$$

m को अचर मानकर

$$=m\mathbf{a}$$

प्राप्त हुआ। यहाँ **a** पिण्ड का त्वरण है।

न्यूटन के उपर्युक्त द्वितीय नियम के अनुसार संवेग परिवर्तन की दर, $d\mathbf{p}/dt$ बल, **F** के समानुपाती होती है। परन्तु, क्योंकि $\frac{d\mathbf{p}}{dt}=m\mathbf{a}$ अतः

$$\mathbf{F} \propto m\mathbf{a}$$

या $\mathbf{F}=Km\mathbf{a}$ (2.13)

हुआ। यहां K एक अचर है। इकाई बल की परिभाषा हम इस प्रकार बना सकते हैं, कि K का मान एक हो जाए। इकाई बल वह है, जो इकाई संहति के पिण्ड पर लगाये जाने पर उसमें, बल की दिशा में, इकाई त्वरण उत्पन्न करे।

MKS पद्धति में इकाई बल वह है, जो 1 किग्रा की संहति के पिण्ड पर लगाये जाने पर उसमें 1 मी से$^{-2}$ का त्वरण उत्पन्न करे। इस बल का मात्रक न्यूटन (प्रतीक N) कहलाता है।

CGS पद्धति में इकाई बल वह है, जो 1 ग्रा की संहति के पिण्ड पर लगाये जाने पर उसमें 1 सेमी से$^{-2}$ का त्वरण उत्पन्न करे। इसका मात्रक डाइन कहलाता है।

बल की विमाएँ LMT^{-2} होती है।

2.14 रैखिक संवेग के संरक्षण का सिद्धांत (Principle of conservation of linear momentum)

रैखिक सवेग के सरक्षण का सिद्धांत है :

अनेक कणों के निकाय पर लगा वाह्य बल जब शून्य हो, तो निकाय का कुल रैखिक संवेग संरक्षित अर्थात्

अचर, रहता है। निकाय का कुल रैखिक संवेग निकाय के सभी कणों के रैखिक संवेगों का सदिश योग है।

रैखिक संवेग संरक्षण का यह नियम ऊर्जा संरक्षण के नियम के समान भौतिकी का एक मूल नियम है, और इन दोनों नियमों का भौतिकी में बड़ा महत्त्व है।

माना कि किसी वियुक्त निकाय में केवल एक कण है, और उस पर कोई बाह्य बल नहीं लगा है। यदि उस कण का वेग $\mathbf{v}$ है, तो गति के प्रथम नियम के अनुसार, कण उसी वेग से चलता रहेगा। अतः, इसका रैखिक संवेग, $m\mathbf{v}$ अचर रहेगा।

अब माना कि किसी वियुक्त निकाय में दो कण हैं, और उनमें परस्पर क्रिया (जैसे, टकराना) हो रही है। इनमें से किसी एक कण को लें, तो परस्पर क्रिया के कारण इसके वेग में परिवर्तन हो रहा होगा, अतः इसके रैखिक संवेग में भी परिवर्तन हो रहा होगा। यही बात दूसरे कण के बारे में भी सही है। किन्तु, क्योंकि निकाय पर कोई बाह्य बल नहीं लग रहा है, अतः प्रत्येक काल में दोनों कणों के रैखिक संवेगों का सदिश योग एक समान होगा।

यदि किसी वियुक्त निकाय में तीन या अधिक परस्पर क्रियाशील कण हों तो उनमें भी उपर्युक्त प्रकार से समझने पर रैखिक संवेगों का सदिश योग सदा एक समान रहेगा। रैखिक संवेग के संरक्षण के सिद्धांत का यही अभिप्राय है।

इसकी विधिवत् उत्पत्ति निम्नलिखित है :

माना कि किसी निकाय में n कण हैं। उनकी संहति $m_1, m_2, \ldots, m_n$ और उनके वेग क्रमशः $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots \mathbf{v}_n$ है। निकाय का कुल रैखिक संवेग $\mathbf{P}$ सभी कणों के कुल रैखिक संवेगों का सदिश योग होगा।

अर्थात्

$$\mathbf{P} = m_1\mathbf{v} + m_2\mathbf{v}_2 + m_3\mathbf{v}_3 + \ldots\ldots + m_n\mathbf{v}_n$$

किन्तु,

$$M\mathbf{v}_{c \cdot m \cdot} = m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 + m_3\mathbf{v}_3 + \ldots + m_n\mathbf{v}_n$$

इनमें M निकाय के सभी कणों की कुल संहति है, और $\mathbf{v}_{c \cdot m \cdot}$ निकाय के "संहति केन्द्र"[1] का वेग है। अर्थात् निकाय का कुल रैखिक संवेग निकाय की संहति और इसके संहति केन्द्र के वेग के बराबर होगा।

उपरलिखित समीकरणों के अनुसार,

$$\mathbf{P} = M\mathbf{v}_{c \cdot m \cdot} \qquad (2.14)$$

काल के प्रति अवकलन करने पर

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \frac{M d\mathbf{v}_{c \cdot m \cdot}}{dt} = M\mathbf{a}_{c \cdot m \cdot}$$

प्राप्त हुआ। इसमें $\mathbf{a}_{c \cdot m \cdot}$ निकाय के संहति केन्द्र का त्वरण है। न्यूटन के द्वितीय नियम के अनुसार,

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \text{निकाय पर परिणामी बाह्य बल}$$

$$= \mathbf{F}_{ext}$$

यदि निकाय पर परिणामी बाह्य बल शून्य हो, तो $\mathbf{F}_{ext} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} = 0$ होगा। अतः इस स्थिति में,

$\mathbf{P}$ = अचर अर्थात्, निकाय का कुल रैखिक संवेग अचर है। यह रैखिक संवेग के संरक्षण का सिद्धांत है, जो न्यूटन के गति के द्वितीय नियम के अनुवर्ती है।

---

1. कणों के निकाय का संहति केन्द्र निकाय के भीतर वह एक बिन्दु है जो उसी प्रकार चलता है जिस प्रकार वह कण चलेगा जिसकी संहति निकाय की समग्र संहति के बराबर हो, और जिसके ऊपर वे ही बल लग रहे हों जो निकाय पर लग रहे हैं। संहति केन्द्र की स्थिति कणों की निजी संहतियों और उनकी परस्परापेक्षी स्थितियों पर निर्भर करती है। यदि n कण हो, जिनकी संहतियाँ क्रमशः, $m_1, m_2 \ldots\ldots m_n$ हों तथा तीन निर्देशांक X, Y और Z के अनुसार जिनके निर्देशांक क्रमशः (x_1, y_1, z_1); $(x_2, y_2, z_2), \ldots(x_n, y_n, z_n)$ हों, तो संहति केन्द्र के निर्देशांक $(x_{c.m.}, y_{c.m.}, z_{c.m.})$ होंगे।

$$X_{c.m.} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i x_i}{M}$$

$$Y_{c.m.} = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i y_i}{M}; \quad Z_{c.m.} = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i z_i}{M}$$

2.15 न्यूटन का गति का तृतीय नियम (Newton's third law of motion)

माना कि किसी वियुक्त निकाय में दो पिण्ड हैं, जिनकी संहतियाँ m_1 और m_2 हैं। माना कि वे दोनों एक ही रेखा में चल रहे हैं, और उनमें परस्पर क्रिया होती है, जिसके फलस्वरूप उनके वेग में, अतः संवेग में भी, परिवर्तन होता है। माना कि किसी कालान्तर $\triangle t$ में सहति m_1 और m_2 में होने वाला संवेग परिवर्तन क्रमशः $\triangle \mathbf{P}_1$ और $\triangle \mathbf{P}_2$ हैं। रैखिक संवेग के संरक्षण के सिद्धान्त के अनुसार वियुक्त निकाय का कुल संवेग-परिवर्तन शून्य होना चाहिए। अतः,

$$\triangle \mathbf{P}_1 + \triangle \mathbf{P}_2 = 0$$

या, $$\triangle \mathbf{P}_1 = -\triangle \mathbf{P}_2 \qquad (2.15)$$

कालान्तर $\triangle t$ से भाग देने और $\triangle t$ की चरमसीमा शून्य करने पर

$$\frac{d\mathbf{P}_2}{dt} = -\frac{d\mathbf{P}_1}{dt}$$

अर्थात्, m_2 के संवेग परिवर्तन की दर

$= m_1$ के संवेग-परिवर्तन की दर

या m_2 पर बल $= -m_1$ पर बल

या, क्रिया $=$ —प्रतिक्रिया

यह न्यूटन का गति का तृतीय नियम है और इसे शब्दों में इस प्रकार व्यक्त कर सकते हैं।

"प्रत्येक क्रिया के लिए सदैव क्रिया के बराबर और उसके विपरीत एक प्रतिक्रिया होती है। या, किन्ही दो पिण्डों की अन्योन्य-क्रियाएं सदैव समान और एक दूसरी के विपरीत होती हैं।"

अधिक सरल शब्दों में इसे यों भी कह सकते है :

"क्रिया और प्रतिक्रिया बराबर और परस्पर विपरीत दिशा में होती है और भिन्न पिण्डों पर लगती हैं।"

जब किसी पिण्ड को कमानीदार तुला के हुक से लटकाया जाता है, तो कमानी पिण्ड पर लगे गुरुत्व बल के कारण खिंचती है। पिण्ड कमानी को अपने भार mg के बराबर बल से खींचता है और कमानी भी पिण्ड पर उतना ही बल, mg, विपरीत दिशा में लगाती है।

बाल्टी द्वारा कुएँ से पानी खीचे जाने के उदाहरण को लीजिये। माना कि रस्सी घर्षणहीन घिरनी पर है, और उसको खींचने में F बल लगाया जा रहा है।

उस स्थिति पर विचार कीजिये जो चित्र 2.19 में दिखाई गई है। इसमें बाल्टी एक स्थिर अवस्था में है। बाल्टी के भार W के कारण रस्सी पर नीचे की ओर एक बल लग रहा है, साथ ही रस्सी भी बाल्टी पर उतना ही, परन्तु विपरीत बल T लगा रही है, जो रस्सी को खीचने के लिए पकड़े हुए व्यक्ति द्वारा लगाया गया बल है।

जब व्यक्ति द्वारा लगाया गया बल, F, W के सन्तुलन स्थिति में लगे हुए तनाव-बल से अधिक होगा तो बाल्टी ऊपर खिचेगी। स्थिर-स्थिति में, बाल्टी का रस्सी पर खिचाव, रस्सी के बाल्टी पर लगे तनाव द्वारा सन्तुलित है। इसी प्रकार, घिरनी के दूसरी ओर, व्यक्ति द्वारा रस्सी पर लगाया गया खिचाव का बल, रस्सी द्वारा उसके हाथों पर लगे तनाव के बल को सन्तुलित किये हुए है। यह न्यूटन के गति के तृतीय नियम का एक उदाहरण है।

चित्र 2.19 एक घर्षणहीन घिरनी के ऊपर रस्सी गुजारकर डोल को खीचना

उदाहरण 2.5

3000 कि ग्रा सहति का एक ट्रक 10 मि से$^{-1}$ के वेग से गतिशील है, और इसके ऊपर दो बल लग रहे है : इजन का 1000 न्यूटन (N) का अग्रगामी बल, और घर्षण का 400 न्यूटन (N) का मन्दन बल। इसकी वेग-वृद्धि की दर कितनी है? 10 से में यह कितनी दूर चलेगा?

(a) ट्रक पर कुल बल $= 1000 - 400$

$= 600$ न्यूटन (N)

वेग-वृद्धि की दर $=$

$$\frac{F}{M} = \frac{600}{3000} = \frac{1}{5} \text{ मी से}^{-2}$$

(b) 10से में तय की हुई दूरी
$= 10 \times 10 + \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} \times 100 = 110$ मी

उदाहरण 2.6

5 कि ग्रा और 3 कि ग्रा के दो पिण्ड एक क्षैतिज, घर्षण-हीन छड़ पर पड़े हल्के धागे के दोनों सिरों पर बँधे हैं। इस निकाय में त्वरण कितना है? धागे में कितना तनाव है? g का मान 9.8 मी से$^{-2}$ है।

निकाय पर कुल बल $= (5-3) \times 9{\cdot}8$ न्यूटन
कुल संहति जो गति में है $= (5+3)$ कि ग्रा

निकाय का त्वरण $= \dfrac{\text{कुल बल}}{\text{गतिमय कुल संहति}}$

$$= \frac{2 \times 9{\cdot}8}{8}$$

$$= 2{\cdot}45 \text{ मी से}^{-2}$$

5 कि ग्रा की संहति पर लगे बल का विचार करने पर प्राप्त होगा,

$$\frac{5 \times 9{\cdot}8 - T}{5} = 2{\cdot}45$$

अतः, $T = 36{\cdot}75$ न्यूटन (N)

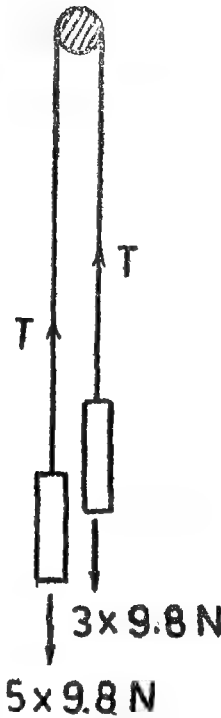
इसी प्रकार 3 कि ग्रा की संहति पर लगे बलों पर विचार करके विद्यार्थी स्वयं T का मान प्राप्त कर सकते है। चिकने धरातल पर पड़े एक ही धागे पर T का मान सर्वत्र समान होना चाहिए।

उदाहरण 2.7

500 कि ग्रा संहति का एक रोलर 1000 कि ग्रा संहति के एक ट्रैक्टर से एक हल्की जंजीर द्वारा जुड़ा हुआ है। इस तन्त्र पर धरती के घर्षण का बल 1000 न्यूटन (N) है। यदि इस तन्त्र का अग्रगामी त्वरण 2 मी से$^{-2}$ है, तो ज्ञात कीजिए:

(a) ट्रैक्टर पर पृथ्वी का अग्रगामी बल, और
(b) जंजीर पर तनाव बल

(a) पूरे तन्त्र पर विचार करते हुए, यदि ट्रैक्टर पर धरती का अग्रगामी बल F है, तो

$$\frac{F - 1000}{1500} = 2$$

चित्र 2.20 किसी घर्षणहीन क्षैतिज छड़ के ऊपर से एक हलकी रस्सी डालकर उसके दोनों सिरों से दो भारों का लटकाना

अतः, $F = 400$ न्यूटन (N)

(b) अकेले ट्रैक्टर पर विचार करते हुए, यदि जंजीर पर तनाव-बल T हो, तो

$$\frac{4000 - T}{1000} = 2$$

अतः, $T = 2000$ न्यूटन (N)

अकेले रोलर पर विचार करते हुए, छात्र T का मान स्वयं ज्ञात कर लें।

2.16 जड़त्वीय संहति (Inertial mass)

विभिन्न संहतियों पर यदि एक समान बल लगायें, तो उनमें भिन्न-भिन्न त्वरण उत्पन्न होते हैं। यह त्वरण पिण्ड के जड़त्व पर निर्भर करता है। जड़त्व जितना ही अधिक होगा, त्वरण उतना ही कम होगा। किसी पिण्ड

पर त्वरण के प्रतिरोध का माप पिण्ड की "जड़त्वीय-संहति" होता है।

यदि एक ही बल F दो भिन्न पिण्डों पर लगाए जाने पर उनमें a_1 और a_2 त्वरण उत्पन्न करता हो, तो

$$\frac{a_2}{a_1}=\frac{m_1}{m_2}$$

जहाँ m_1 और m_2 पिण्डों की जड़त्वीय संहतियाँ है। यदि इन दोनों में से एक पिण्ड की जड़त्वीय संहति को मानक के रूप में लें, तो दूसरे पिण्ड की जड़त्वीय संहति पहले की तुलना में ज्ञात हो जाएगी।

भार (Weight)

किसी पिण्ड का भार उस पर लगने वाला गुरुत्व-जनित बल होता है। यदि किसी स्थान पर गुरुत्वीय त्वरण का मान g हो तो, वहाँ पर m संहति वाले पिण्ड का भार mg होगा। भार बल के मात्रकों में ही व्यक्त किया जाता है। कमानीदार तुला से पिण्ड का भार निकाला जाता है। क्योंकि g का मान जगह-जगह पर अलग-अलग होता है, अतः एक ही पिण्ड का भार भी जगह-जगह पर अलग-अलग होगा।

2.17 टक्कर (Collision)

टक्कर के अनेक उदाहरण हम नित्यप्रति के जीवन में देखते है। कैरम की गोटियों की परस्पर टक्कर, एक गाडी की दूसरी से टक्कर, गैस के अणुओं की आपस में टक्कर, परमाणवीय और नाभिकीय कणो की टक्कर आदि। जब कोई गतिमान पिण्ड किसी दूसरे से टकराता है तो दोनों के वेग परिवर्तित हो जाते हैं। टक्कर के बाद उनके वेगों को गणना करके ज्ञात किया जा सकता है। इसके आधार रैखिक संवेग संरक्षण और ऊर्जा संरक्षण के सिद्धान्त हैं।

टक्कर के दौरान एक पिण्ड से दूसरे में गतिज ऊर्जा का आदान-प्रदान, अर्थात हस्तान्तरण होता है यदि टक्कर की क्रिया में गतिज ऊर्जा का (ऊर्जा के दूसरे रूपों में परिवर्तन होकर) किसी प्रकार ह्रास न हो तो ऐसी टक्कर को **प्रत्यास्थी** टक्कर कहते हैं, अन्यथा इसे **अप्रत्यास्थी** टक्कर कहते हैं। वास्तविक स्थिति में गतिज ऊर्जा का ध्वनि अथवा ऊष्मा के रूप में ह्रास होता है। अतः स्थूल पिण्डों की टक्कर सर्वथा प्रत्यास्थी नहीं होती। परमाणवीय और नाभिकीय कणों की टक्कर, विशेष परिस्थितियों में, प्रत्यास्थी होती है। कल्पना कीजिए कि बन्दूक से एक गोली दागी गई, और वह रेत की बोरी में धँस गई। तो, इस क्रिया में गोली की गतिज ऊर्जा प्रतिरोधी पदार्थ के प्रतिरोध के विरुद्ध कार्य करने में व्यय हुई। यह पूर्णरुपेण अप्रत्यास्थी टक्कर का उदाहरण हुआ। यदि कोई पिण्ड टकराने पर दूसरे पिण्ड से चिपक जाए तो यह भी सर्वथा अप्रत्यास्थी टक्कर हुई।

मानो कि m_1 सहति का एक कण जो v_{1i} वेग से चल रहा है एक दूसरे कण से टकराता है, जिसकी संहति m_2 है और जो विश्राम की स्थिति में है (चित्र 2.21)। टक्कर के बाद उनके वेग, माना कि, v_{1f} और v_{2f} हो जाते है। v_{1f} और v_{2f} पहले कण के आरम्भिक वेग की दिशा से θ_1 और θ_2 कोण बनाते है। माना कि टक्कर प्रत्यास्थी है :

वेगों के X-और Y-दिशाओं में अदिश घटक निकाल कर और रैखिक संवेग संरक्षक के सिद्धान्त को लगाने पर हमें निम्नलिखित समीकरण प्राप्त होंगे :

X-दिशा के संवेग घटकों के लिए :

$$m_1 v_{1i}=m_1 v_{1f} \cos\theta_1+m_2 v_{2f} \cos\theta_2 \qquad (2.16)$$

और Y-दिशा के संवेग घटकों के लिए

$$o=m_1 v_{1f} \sin\theta_1-m_2 v_{2f} \sin\theta_2 \qquad (2.17)$$

और, क्योंकि टक्कर प्रत्यास्थी है, अतः गतिज ऊर्जा संरक्षण के सिद्धान्तानुसार :

$$\tfrac{1}{2}m_1 v_{1i}^2=\tfrac{1}{2}m_1 v_{1f}^2+\tfrac{1}{2}m_2 v_{2f}^2 \qquad (2.18)$$

अब यदि हमें m_1, m_2 और v_{1i} के ही मान ज्ञात हों तो हमें टक्कर के बाद की गति का पूर्णतः ज्ञान नहीं हो सकता, क्योंकि अज्ञात राशियाँ चार हैं (v_{1f}, v_{2f}, θ_1 और θ_2) और समीकरण केवल तीन ही हैं। अतएव टक्कर के बाद के गति का पूरा ज्ञान करने के लिए उनमें से कोई एक राशि और ज्ञात होनी चाहिए। θ_1 या θ_2 में से किसी एक को भिन्न-भिन्न मान देकर उसके अनुसार, उपरिलिखित समीकरणों की सहायता से, अन्य तीन राशियों का मान ज्ञात कर सकते हैं।

सीधी टक्कर (Head-on collision) : अब हम सीधी

चित्र 2.21 m_2 द्रव्यमान के विरामावस्था के कण के साथ m_1 द्रव्यमान और v_{1i} वेग वाले किसी कण की टक्कर। धुधले वृत्त टक्कर के पश्चात् उनकी स्थितियों को सूचित करते हैं।

टक्कर की एक वह विशेष स्थिति लेते है, जिनमें $\theta_1=0$ और $\theta_2=0$ है। इस स्थिति में दोनों कण टक्कर के बाद उसी दिशा में चलते हैं जिस दिशा में पहला कण टक्कर से पहले था। इस दशा में समीकरण (2.16) और (2.18), का रूप यह होगा :

$$m_1 v_{1i}=m_1\ v_{1f}+m_2\ v_{2f} \qquad (2.19)$$

$$\tfrac{1}{2}m_1\ v_1{}^2{}_i=\tfrac{1}{2}m_i\ v_1{}^2{}_f+\tfrac{1}{2}m_2\ v_2{}^2{}_f \qquad (2.20)$$

इन्हें पुनर्योजित करके और v_{1f} और v_{2f} के लिए हल करने पर प्राप्त होगा :

$$v_{1f}=\frac{(m_1-m_2)\ v_{1i}}{(m_1+m_2)}$$

$$v_{2f}=\frac{2m_i\ v_{1i}}{m_1+m_2}$$ और

अब, यदि $m_1<m_2$ हो तो

$v_{1f}=-v_{1i}$ और

$v_{2f}=0$

इससे प्रगट होता है कि यदि कोई बहुत हल्का कण किसी बहुत भारी कण से टकराए, तो उच्छलित होकर वह सीधा वापस लौट आयेगा।

उदाहरण 2.8

1 कि ग्रा संहति का कोई पिण्ड किसी दूसरे विश्रान्त पिण्ड से टकरा कर पूर्ववत् दिशा में ही अपने प्रारंभिक वेग के एक-चौथाई वेग से चलता रहता है। दूसरे पिण्ड की संहति ज्ञात कीजिये।

दी हुई राशियों के मान समीकरण (2.19) और (2.20) में रखने पर हमें प्राप्त होगा

$v_{1i}=\tfrac{1}{4}\ v_{1i}+m_2\ v_{2f}$

और $\tfrac{1}{2}v_{1i}{}^2=\tfrac{1}{2}\times\tfrac{1}{16}\ v_{1i}{}^2+\tfrac{1}{2}m_2\ v_2{}^2{}_f$

इन दोनों समीकरणों को हल करने पर प्राप्त होगा

$m_2=\dfrac{9}{15}$ कि ग्रा

पर त्वरण के प्रतिरोध का माप पिण्ड की "जड़त्वीय-संहति" होता है।

यदि एक ही बल F दो भिन्न पिण्डों पर लगाए जाने पर उनमें a_1 और a_2 त्वरण उत्पन्न करता हो, तो

$$\frac{a_2}{a_1}=\frac{m_1}{m_2}$$

जहाँ m_1 और m_2 पिण्डों की जड़त्वीय संहतियाँ है। यदि इन दोनों में से एक पिण्ड की जड़त्वीय संहति को मानक के रूप में लें, तो दूसरे पिण्ड की जड़त्वीय संहति पहले की तुलना में ज्ञात हो जाएगी।

भार (Weight)

किसी पिण्ड का भार उस पर लगने वाला गुरुत्व-जनित बल होता है। यदि किसी स्थान पर गुरुत्वीय त्वरण का मान g हो तो, वहाँ पर m संहति वाले पिण्ड का भार mg होगा। भार बल के मात्रकों में ही व्यक्त किया जाता है। कमानीदार तुला से पिण्ड का भार निकाला जाता है। क्योंकि g का मान जगह-जगह पर अलग-अलग होता है, अत: एक ही पिण्ड का भार भी जगह-जगह पर अलग-अलग होगा।

2.17 टक्कर (Collision)

टक्कर के अनेक उदाहरण हम नित्यप्रति के जीवन में देखते है। कैरम की गोटियों की परस्पर टक्कर, एक गाड़ी की दूसरी से टक्कर, गैस के अणुओं की आपस में टक्कर, परमाणवीय और नाभिकीय कणों की टक्कर आदि। जब कोई गतिमान पिण्ड किसी दूसरे से टकराता है तो दोनों के वेग परिवर्तित हो जाते हैं। टक्कर के बाद उनके वेगों को गणना करके ज्ञात किया जा सकता है। इसके आधार रैखिक संवेग संरक्षण और ऊर्जा संरक्षण के सिद्धान्त हैं।

टक्कर के दौरान एक पिण्ड से दूसरे में गतिज ऊर्जा का आदान-प्रदान, अर्थात हस्तान्तरण होता है यदि टक्कर की क्रिया में गतिज ऊर्जा का (ऊर्जा के दूसरे रूपों में परिवर्तन होकर) किसी प्रकार ह्रास न हो तो ऐसी टक्कर को **प्रत्यास्थी** टक्कर कहते है, अन्यथा इसे **अप्रत्यास्थी** टक्कर कहते हैं। वास्तविक स्थिति में गतिज ऊर्जा का ध्वनि अथवा ऊष्मा के रूप में ह्रास होता है। अतः स्थूल पिण्डों की टक्कर सर्वथा प्रत्यास्थी नहीं होती। परमाणवीय और नाभिकीय कणों की टक्कर, विशेष परिस्थितियों में, प्रत्यास्थी होती है। कल्पना कीजिए कि बन्दूक से एक गोली दागी गई, और वह रेत की बोरी में धँस गई। तो, इस क्रिया में गोली की गतिज ऊर्जा प्रतिरोधी पदार्थ के प्रतिरोध के विरुद्ध कार्य करने में व्यय हुई। यह पूर्णरूपेण अप्रत्यास्थी टक्कर का उदाहरण हुआ। यदि कोई पिण्ड टकराने पर दूसरे पिण्ड से चिपक जाए तो यह भी सर्वथा अप्रत्यास्थी टक्कर हुई।

मानो कि m_1 संहति का एक कण जो v_{1i} वेग से चल रहा है एक दूसरे कण से टकराता है, जिसकी संहति m_2 है और जो विश्राम की स्थिति में है (चित्र 2.21)। टक्कर के बाद उनके वेग, माना कि, v_{1f} और v_{2f} हो जाते हैं। v_{1f} और v_{2f} पहले कण के आरम्भिक वेग की दिशा से θ_1 और θ_2 कोण बनाते हैं। माना कि टक्कर प्रत्यास्थी है :

वेगों के X-और Y-दिशाओं में अदिश घटक निकाल कर और रैखिक संवेग संरक्षक के सिद्धान्त को लगाने पर हमें निम्नलिखित समीकरण प्राप्त होंगे :

X-दिशा के संवेग घटकों के लिए :

$$m_1 v_{1i}=m_1 v_{1f} \cos\theta_1+m_2 v_{2f} \cos\theta_2 \qquad (2.16)$$

और Y-दिशा के संवेग घटकों के लिए

$$o=m_1 v_{1f} \sin\theta_1-m_2 v_{2f} \sin\theta_2 \qquad (2.17)$$

और, क्योंकि टक्कर प्रत्यास्थी है, अतः गतिज ऊर्जा संरक्षण के सिद्धान्तानुसार :

$$\tfrac{1}{2}m_1 v_{1i}^2=\tfrac{1}{2}m_1 v_{1f}^2+\tfrac{1}{2}m_2 v_{2f}^2 \qquad (2.18)$$

अब यदि हमें m_1, m_2 और v_{1i} के ही मान ज्ञात हों तो हमें टक्कर के बाद की गति का पूर्णतः ज्ञान नहीं हो सकता, क्योंकि अज्ञात राशियाँ चार हैं (v_{1f}, v_{2f}, θ_1 और θ_2) और समीकरण केवल तीन ही है। अतएव टक्कर के बाद के गति का पूरा ज्ञान करने के लिए उनमें से कोई एक राशि और ज्ञात होनी चाहिए। θ_1 या θ_2 में से किसी एक को भिन्न-भिन्न मान देकर उसके अनुसार, उपरिलिखित समीकरणों की सहायता से, अन्य तीन राशियों का मान ज्ञात कर सकते हैं।

सीधी टक्कर (Head-on collision) : अब हम सीधी

चित्र 2.21 m_2 द्रव्यमान के विरामावस्था के कण के साथ m_1 द्रव्यमान और v_{1i} वेग वाले किसी कण की टक्कर। धुंधले वृत्त टक्कर के पश्चात् उनकी स्थितियों को सूचित करते हैं।

टक्कर की एक वह विशेष स्थिति लेते है, जिनमें $\theta_1=0$ और $\theta_2=0$ है। इस स्थिति में दोनों कण टक्कर के बाद उसी दिशा में चलते हैं जिस दिशा में पहला कण टक्कर से पहले था। इस दशा में समीकरण (2.16) और (2.18), का रूप यह होगा :

$$m_1 v_{1i}=m_1\ v_{1f}+m_2\ v_{2f} \qquad (2.19)$$

$$\tfrac{1}{2}m_1\ v_1{}^2{}_i=\tfrac{1}{2}m_i\ .v_1{}^2{}_f+\tfrac{1}{2}m_2\ v_2{}^2{}_f \qquad (2.20)$$

इन्हें पुनर्योजित करके और v_{1f} और v_{2f} के लिए हल करने पर प्राप्त होगा :

$$v_{1f}=\frac{(m_1-m_2)\ v_{1i}}{(m_1+m_2)}$$

$$v_{2f}=\frac{2m_i\ v_{1i}}{m_1+m_2}$$ और

अब, यदि $m_1 < m_2$ हो तो

$v_{1f}=-v_{1i}$ और

$v_{2f}=0$

इससे प्रगट होता है कि यदि कोई बहुत हल्का कण किसी बहुत भारी कण से टकराए, तो उच्छलित होकर वह सीधा वापस लौट आयेगा।

उदाहरण 2.8

1 कि ग्रा संहति का कोई पिण्ड किसी दूसरे विश्रान्त पिण्ड से टकरा कर पूर्ववत् दिशा में ही अपने प्रारंभिक वेग के एक-चौथाई वेग से चलता रहता है। दूसरे पिण्ड की संहति ज्ञात कीजिये।

दी हुई राशियों के मान समीकरण (2.19) और (2.20) में रखने पर हमें प्राप्त होगा

$v_{1i}=\tfrac{1}{4}\ v_{1i}+m_2\ v_{2f}$

और $\tfrac{1}{2}v_{1i}{}^2=\tfrac{1}{2}\times\tfrac{1}{16}\ v_{1i}{}^2+\tfrac{1}{2}m_2\ v_2{}^2{}_f$

इन दोनो समीकरणों को हल करने पर प्राप्त होगा

$m_2=\dfrac{9}{15}$ कि ग्रा

2.18 आवेग (Impulse)

किसी गतिमान पिण्ड की किसी दूसरे पिण्ड से टक्कर पर थोड़ा और विचार करें। माना कि टक्कर अवधि, अर्थात् वह अवधि जितनी देर दोनों पिण्ड एक दूसरे को स्पर्श करते हैं और उनमें परस्पर संवेग का हस्तांतरण होता है, t है। माना कि उनमें परस्पर लगने वाले बल की दिशा अपरिवर्तित रहती है। टक्कर की अवधि में पिण्डों पर लगने वाले बलो का हमें बहुधा ज्ञान नही होता।

न्यूटन के गति के द्वितीय नियम के अनुसार

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt}=\mathbf{F}$$

जहाँ, $\mathbf{p}$ और $\mathbf{F}$ क्रमशः पिण्ड का संवेग और उस पर किसी काल-बिन्दु पर लगने वाला बल है। अतः,

$\int d\mathbf{p}=\int \mathbf{F}dt$। यदि पिण्ड का आरम्भिक संवेग $\mathbf{p}_1$ है और अवधि t के उपरान्त उसका संवेग $\mathbf{p}_2$ होता हो, तो,

$$\mathbf{p}_2-\mathbf{p}_1=\int^t \mathbf{F}dt$$

अर्थात् $\int_0^t \mathbf{F}dt$ पिण्ड के संवेग परिवर्तन के बराबर है। इस राशि को बल का **आवेग** कहते हैं। आवेग को प्रतीक रूप में $\mathbf{J}$ लिखते हैं।

अतः,

$$\mathbf{J}=\int_0^t \mathbf{F}dt=\mathbf{p}_2-\mathbf{p}_1 \qquad (2.21)$$

नोट : टक्कर की अवधि में बल का परिमाण सामान्यतः एक समान नहीं रहता। यदि $\mathbf{F}$ बल का औसत मान हो तो,

संवेग-परिवर्तन $=\mathbf{F}.t$

उदाहरण 2.9

एक खिलाड़ी 0.2 कि ग्रा संहति की एक गेंद को, जो क्षैतिज दिशा में 30 मी $से^{-1}$ के वेग से आ रही है, अपने बल्ले से मारता है। गेंद का वेग अब अपनी प्रारंभिक दिशा की विपरीत दिशा मे 40 मी $से^{-1}$ हो जाता है। इस टक्कर में आवेग ज्ञात कीजिये।

आवेग $\mathbf{J}$= गेंद के संवेग में परिवर्तन

$=(0.2)\ (-40)-(0.2)\ (30)$

$=-14$ कि ग्रा मी $से^{-1}$

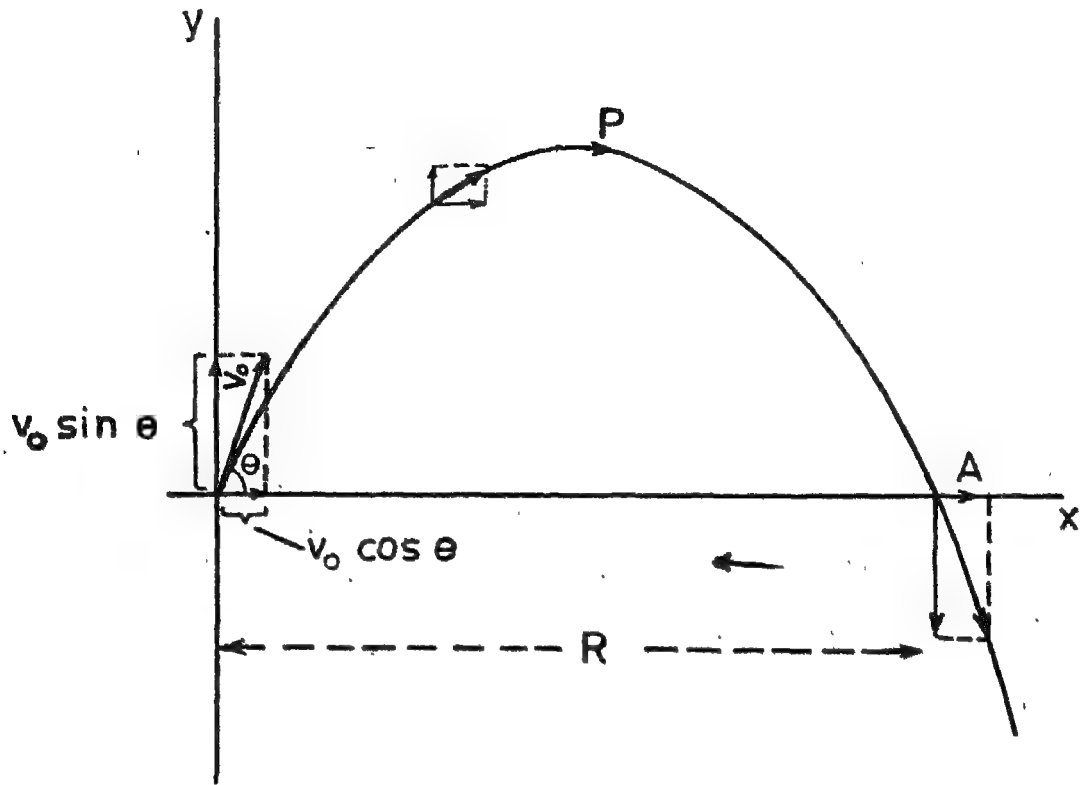
यहाँ हमने गति की प्रारम्भिक दिशा को धनात्मक दिशा माना है।

2.19 द्विविमीय गति, प्रक्षेप-गति (Two dimensional motion, projectile motion)

यदि किसी पिण्ड को कोई प्रारम्भिक वेग देकर खुले में फेंकें, और वायु का प्रतिरोध नगण्य हो, तो उस पिण्ड का पथ ऊर्ध्वाधर समतल में वक्राकार होगा। इस प्रकार के प्रक्षेप्य पिण्ड की गति के उदाहरण हवा में फेंकी गई गेंद, या वायुयान से नीचे गिरते हुए किसी पिण्ड की गति हैं। इस प्रकार की गति करने वाले पिण्डों को प्रक्षेप्य कहते है, और उनके पथ को प्रक्षेप-पथ कहते हैं।

माना कि किसी पिण्ड को क्षैतिज-अक्ष OX से कोण θ बनाती हुई दिशा में प्रारम्भिक वेग v_o से फेंका (चित्र 2.22)। वेग-सदिश जिस ऊर्ध्वाधर समतल में है, उसमें O को अक्ष-केन्द्र बनाती हुई निर्देशांक्ष रेखायें OX और OY है।

क्योंकि, वायु का प्रतिरोध नगण्य माना गया है, अतः पिण्ड पर त्वरण केवल गुरुत्व जनित, और नीचे की ओर लगेगा। स्पष्टतः इस त्वरण का क्षैतिज घटक शून्य है। पिण्ड की गति का अध्ययन करने के लिए यह सुविधाजनक रहेगा कि इसके वेग को क्षैतिज और ऊर्ध्वाधर घटकों में वियोजित कर लिया जाए। इन दोनों दिशाओं में v_o के अदिश घटक क्रमशः $v_o \cos\theta$ और $v_o \sin\theta$ हैं। और क्योंकि OX-दिशा में कोई त्वरण नहीं है, अतः वेग का क्षतिज घटक $v_o \cos\theta$ अचर रहेगा।

वेग का ऊर्ध्व घटक, $v_o \sin\theta$ ऊपर की ओर है (चित्र 2.22)। अतः, इस पर नीचे की ओर गुरुत्वजनित त्वरण g लगा रहेगा। किसी काल-बिन्दु पर ऊर्ध्व-वेग, v_y को निम्नलिखित समीकरण द्वारा व्यक्त कर सकते हैं: $v_y=v_o\sin\theta-gt$, जिसमें t प्रारम्भ से लेकर उस काल-बिन्दु तक की अवधि है। जैसे-जैसे t का मान बढ़ेगा तदनुसार, आरम्भ में, ऊर्ध्व-वेग का मान कम होता जायेगा और t के $\frac{v_o \sin\theta}{g}$ के बराबर होने पर शून्य तक पहुँच

चित्र 2.22 किसी प्रक्षेप्य का पथ। इसका प्रारंभिक वेग v_o और इसके सदिश घटकों को दिखाया गया है। P बिन्दु पर इसका वेग केवल क्षैतिज दिशा में है।

जायेगा। उस काल में प्रक्षेप्य का क्षणिक वेग केवल क्षैतिज दिशा में ही होगा, क्योंकि उस काल प्रक्षेप्य के वेग का केवल क्षैतिज घटक ही होगा। उस काल प्रक्षेप्य अपने पथ के सबसे ऊँचे बिन्दु P पर होगा। इसके पश्चात, वेग के ऊर्ध्व घटक का मान प्रक्षेप्य के भूमि पर गिरने तक नीचे की दिशा में निरन्तर बढ़ता जायेगा।

किसी काल-बिन्दु पर पिण्ड के क्षैतिज तथा ऊर्ध्वाधर-दिशाओं में वेग ज्ञात हों तो उसका परिणामी वेग उन दोनों के संयोजन द्वारा ज्ञात कर सकते हैं। क्षैतिज और ऊर्ध्वाधर-दिशाओं में पिण्ड द्वारा किसी अवधि t में तय की गई दूरी भी ज्ञात कर सकते हैं। माना कि ये दूरियां x और y हैं, तो x और y उस काल बिन्दु पर प्रक्षेप्य की संहति-केन्द्र के निर्देशांक होंगे। इस प्रकार प्रक्षेप्य का पथ निर्धारित हुआ।

प्रक्षेप्य की गति का समीकरण (Equation of motion of a projectile)

क्षैतिज-वेग $v_x = v_o \cos\theta$ (अचर) (2.22)

t काल में क्षैतिज दिशा में तय की गई दूरी,

$$x = (v_o \cos\theta)t \quad (2.23)$$

गति प्रारम्भ करने के t काल उपरान्त ऊर्ध्व-वेग,

$$v_y = v_o \sin\theta - gt \quad (2.24)$$

t काल में ऊर्ध्व दिशा, में तय की दूरी,

$$y = (v_o \sin\theta)t - \tfrac{1}{2}gt^2 \quad (2.25)$$

परिणामी वेग का परिमाण $\sqrt{v_x^2+v_y^2}$ होगा और इसकी दिशा का कोण $\tan\alpha=\frac{v_y}{v_x}$ द्वारा प्राप्त होगा। α वह कोण है जो परिणामी वेग क्षैतिज-दिशा से बनाता है।

प्रक्षेप्य-पथ के लिए समीकरण (Equation of the trajectory of the projectile)

प्रक्षेपण के उपरान्त किसी काल-बिन्दु t पर प्रक्षेप्य की स्थिति के निर्देशांक x और y समीकरण (2.23) और (2.25) द्वारा व्यक्त है। इन दोनों की सहायता से t को लुप्त करने पर जो समीकरण प्राप्त होगी उसका रूप होगा।

$$y=px-qx^2 \qquad (2.26)$$

जिसमें p और q अचर हैं। यह एक परवलय का समीकरण है।

अतः प्रक्षेप-पथ परवलयाकार होता है।

2.20 प्रक्षेप्य का परास (Range of a projectile)

चित्र 2.22 में O प्रक्षेपण-बिन्दु, अर्थात वह बिन्दु जहाँ से प्रक्षेप्य फेंका गया था, है। A वह बिन्दु है जहाँ प्रक्षेप-पथ O से होकर जाने वाली क्षैतिज रेखा को काटता है। दूरी OA प्रक्षेप्य का **क्षैतिज परास** अथवा केवल **परास** कहलाता है, और इसका प्रतीक R है।

बिन्दु A पर y निर्देशांक शून्य है। अतः समीकरण (2.25) से :

$$0=(v_0\sin\theta)t-\tfrac{1}{2}gt^2$$

अतः, $t=\frac{2v_0\sin\theta}{g}$

परास R इस काल-अवधि 't' में प्रक्षेप्य द्वारा तय की गई क्षैतिज दूरी है। इसलिये,

$$R=(v_0\cos\theta)\frac{2v_0\sin\theta}{g}$$

$$=\frac{v_0^2\sin2\theta}{g} \qquad (2.27)$$

R के लिये प्राप्त हुए इस समीकरण से यह प्रगट होता है कि किसी दिये हुए प्रक्षेपण वेग पर R का अधिकतम मान तब प्राप्त होगा जब $\sin2\theta$ अधिकतम हो। अर्थात्, जब $2\theta=90°$ या $\theta=45°$ हो।

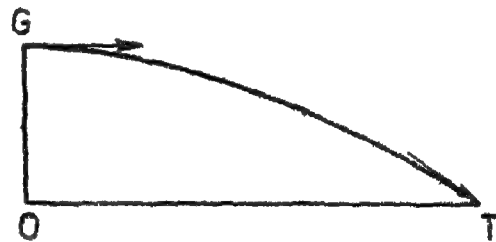
उदाहरण 2.10

किसी क्षैतिज समतल पर एक तोप 44.1 मी की ऊँचाई पर रखी हुई है। उसकी नली से क्षैतिज दिशा में एक गोला 300 मी से$^{-1}$ के वेग से इस प्रकार दागा जाता है कि वह क्षैतिज समतल पर स्थित लक्ष्य को बेध सके। ज्ञात कीजिए :

(a) गोले को लक्ष्य तक पहुंचने में कितना समय लगा?

(b) लक्ष्य कहाँ स्थित है?

(c) लक्ष्य बेध के काल में गोले का ऊर्ध्व-वेग कितना है?

g का मान 9.8 मी से$^{-2}$ है।

चित्र 2.23 क्षैतिज दिशा से दागा गोला OG=44.1 मी

(a) आरम्भ में वेग का ऊर्ध्व-घटक शून्य है। यदि गोले को लक्ष्य तक पहुंचने में लगने वाला समय t हो, तो समीकरण (2.10) के अनुसार

$$44.1=\tfrac{1}{2}\times9.8\times t^2$$

जिससे t का लब्ध मान=3 से

(b) T लक्ष्य है (चित्र 2.23) और OT प्रक्षेप्य का परास है।

अतः,

OT=(वेग का क्षैतिज घटक)×(पहुंचने में लगा समय)

=300×3

=900 मी

(c) यदि लक्ष्यबेध के समय ऊर्ध्व-वेग v_y हो, तो समीकरण (2.11) के अनुसार

$$v_y^2 = 2 \times 9.8 \times 44.1$$

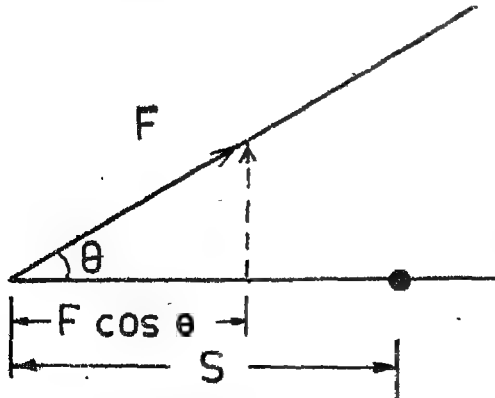
अर्थात्,

$$v_y = 29.4 \text{ मीसे}^{-1}$$

2.21 कार्य, ऊर्जा और शक्ति (Work, energy and power)

पिछली कक्षाओं में हम कार्य और ऊर्जा की समतुल्यता के विषय में पढ चुके है। हमने यह भी पढा है कि यांत्रिक ऊर्जा के दो रूप है : गतिज और स्थितिज। गतिज ऊर्जा गति से उत्पन्न ऊर्जा है और स्थितिज ऊर्जा पिण्ड की वह ऊर्जा है जो इसकी किसी अन्य पिण्ड, जिससे यह अन्योन्य-क्रिया करता है, के सापेक्ष स्थिति के कारण उत्पन्न होती है और एक प्रकार से पिण्ड की तनाव की स्थिति के कारण इसमें होती है जैसे, गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा। जब कभी किसी पिण्ड पर कोई बल कार्य करता है, तो पिण्ड की ऊर्जा में परिवर्तन हो जाता है।

2.22 कार्य (Work)

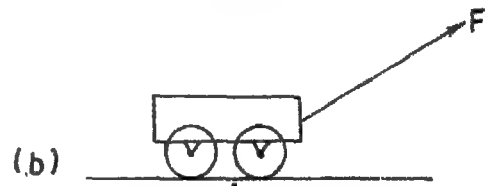
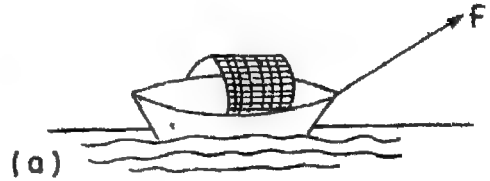
किसी बल द्वारा किये गये कार्य का परिमाण उस बल और उसके लगाव-बिन्दु के बल की दिशा में हुए विस्थापन के गुणनफल के बराबर होता है।

चित्र 2.24 दो सदिशों **F** तथा **s** के डॉट गुणनफल के रूप में कार्य। W=Fs=F cosθ s।

यदि बल **F** और उसके द्वारा उत्पन्न विस्थापन **s** के बीच कोण θ हो, तो बल के विस्थापन की दिशा में घटक का परिमाण **F** $\cos\theta$ या सादा F $\cos\theta$ होगा (चित्र 2.24)।

किये गये कार्य का परिमाण

$$W = (F \cos\theta)\ (s) \qquad (2.28)$$

होगा। यदि $\theta = 0$ हो, अर्थात् यदि विस्थापन बल की दिशा में ही हो तो, $\cos\theta = 1$ और $W = \mathbf{F.s}$

यदि $\theta = 90°$ हो, तो $\cos\theta = 0$ और इस दशा में लगाव-बिन्दु का विस्थापन होते हुए भी कार्य नहीं होगा।

चित्र 22.5 (a) किसी नहर में रस्से द्वारा खिंचती नाव।
(b) किसी सड़क पर रस्से से खिंचती गाड़ी।

जैसे, चन्द्रमा की पृथ्वी के चारो ओर गति वृत्ताकार है। इस पर कार्यकारी बल, जो अभि-केन्द्रीय बल है, गति की दिशा के सदैव लम्बवत् रहता है। अतः, इस बल द्वारा कोई कार्य नहीं होता।

चित्र 2.25 (a) नहर में रस्सी से खींची जाती हुई नाव तथा 2.25(b) में सड़क पर रस्सी से खींची जाती हुई गाड़ी दिखाई गई है। दोनों दशाओं में बल की दिशा क्षैतिज दिशा से झुकी हुई है, और लगाव-बिन्दु का विस्थापन क्षैतिज दिशा में है। दोनों दशाओं में कार्य समीकरण (2.28) के अनुसार उपलब्ध होगा। कार्य अदिश राशि है और इसे हम दो सदिशों **F** और **s** का **डॉट-गुणनफल मान सकते हैं।**

$$W = F.s \qquad (2.29)$$

अन्तर्राष्ट्रीय मात्रक पद्धति (SI) में कार्य का मात्रक न्यूटन मीटर (Nm) या जूल (J) है, और इकाई (एक न्यूटन-मीटर या एक जूल) कार्य तब सम्पन्न होगा जब 1 न्यूटन बल के प्रभाव से लगाव-बिन्दु बल की दिशा में 1 मी विस्थापित हो।

CGS पद्धति में कार्य का मात्रक अर्ग (erg) है, इकाई (एक अर्ग) कार्य तब सम्पन्न होगा जब 1 डाइन बल के प्रभाव से लगाव-बिन्दु बल की दिशा में 1 से मी विस्थापित हो।

1 जूल $= 10^7$ अर्ग

2.23 अचर बल द्वारा सम्पन्न कार्य (Work done by a constant force)

माना कि कोई अचर बल **F** किसी पिण्ड पर लग रहा है और इसका बल की दिशा में विस्थापन ds है सम्पन्न कार्य का मान होगा

$$dW = \mathbf{F}.ds$$

कुल विस्थापन S होने में सम्पन्न कार्य

$$\int dW = \int \mathbf{F} ds$$

परन्तु, हमें ज्ञात है कि $F = m\mathbf{a} = m\frac{dv}{dt}$

और $\frac{dv}{dt}$ को इस प्रकार लिख सकते हैं :

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt}$$

तब

$$W = \int m\left(\frac{dv}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}\right)ds$$

किन्तु $\frac{ds}{dt} = v$

अतः

$$W = \int mv\, dv.$$

अब यदि बल लगने से पूर्व पिण्ड का आरम्भिक वेग v_i रहा हो, और अन्तिम दशा में इसका अन्तिम वेग v_f हो, तो

$$W = \int_{v_i}^{v_f} mvdv = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2$$

और चूँकि $W = \mathbf{F}.s$ इसलिए उपरिलिखित समीकरण को इस प्रकार लिख सकेंगे :

$$F.s = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 \qquad (2.30)$$

यदि पिण्ड आरम्भ में विश्राम-दशा में रहा हो, तो $v_i = 0$ और बल द्वारा सम्पन्न कार्य, अथवा पिण्ड को प्रदत्त ऊर्जा, $\frac{1}{2}mv_f^2$ होगी। यह व्यंजक वेग का फलन है और पिण्ड की गतिज ऊर्जा का मान है।

समीकरण (2.30) की दाहिनी ओर का पद पिण्ड की गतिज ऊर्जा में वृद्धि का व्यंजक है। अतः, सम्पन्न कार्य गतिज-ऊर्जा में वृद्धि के बराबर होता है।

अब इस वक्तव्य को हम निर्वात-पाती पिंड की गति पर लगाकर देखेंगे।

माना कि m संहति का कोई पिण्ड धरती के ऊपर h ऊंचाई से छोड़ दिया गया। यदि h का मान पृथ्वी के अर्द्धव्यास की तुलना में बहुत छोटा है, तो इस स्थिति में गुरुत्वीय त्वरण के मान में अन्तर को नगण्य मान सकते हैं। इसलिए, पिण्ड पर कार्यकारी गुरुत्वीय बल mg भी अचर माना जा सकता है। h ऊंचाई पर अवस्थिति के कारण पिण्ड में कुछ स्थितिज ऊर्जा होगी। वहाँ से धरती तक, h दूरी गिरने के कारण, गुरुत्वीय बल द्वारा इस पर किया गया कार्य mgh हुआ। किन्तु, दूसरी ओर, क्योंकि पिण्ड की धरती के केन्द्र से दूरी में h की कमी आई है, अतः पृथ्वी के सापेक्ष इसकी स्थितिज ऊर्जा में भी कमी आई। स्थितिज ऊर्जा में यह कमी गुरुत्वीय बल द्वारा किये गये कार्य mgh के बराबर होगी।

h ऊँचाई से गिरने पर यदि पिण्ड का वेग v हो जाय, तो समीकरण (2.11) के अनुसार, $v^2 = 2gh$; अतएव, $mgh = \frac{1}{2}mv^2$, जो पिण्ड की गतिज ऊर्जा है। अतः सिद्ध हुआ कि पिण्ड की स्थितिज ऊर्जा का ह्रास गतिज ऊर्जा में वृद्धि के बराबर है।

उदाहरण 2.11

एक इंजन समतल लीक पर गाड़ी को 1 किमी दूरी तक खींचकर ले जाता है। यदि घर्षण का प्रतिरोध

5×10^5 न्यूटन हो तो सम्पन्न कार्य का मान निकालिए।

कार्य = (बल) × (बल की दिशा में विस्थापन)

इंजन घर्षण प्रतिरोध के विपरीत उतना ही बल लगा रहा है।

इसलिए,

कार्य $=5\times10^5\times10^3$ जूल (J)

$=5\times10^8$ जूल (J)

उदाहरण 2.12

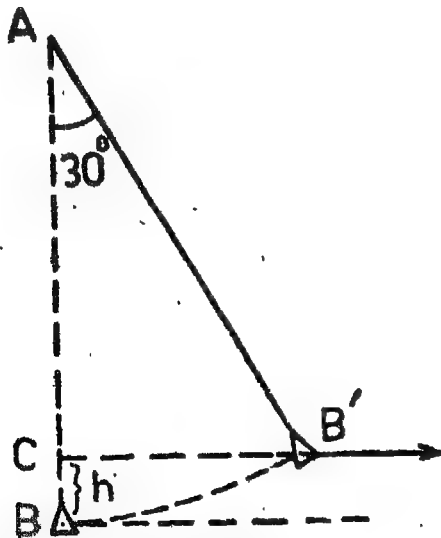
एक न्यूट्रॉन जिसकी संहति 1.67×10^{-27} किग्रा है, 2×10^4 मी से$^{-1}$ के वेग से चल रहा है। इसकी गतिज ऊर्जा का मान निकालिए।

न्यूट्रॉन की गतिज ऊर्जा

$=\frac{1}{2}\times1.67\times10^{-27}\times(2\times10^4)^2$ जूल (J)

$=3.34\times10^{-19}$ जूल (J)

उदाहरण 2.13

50 किग्रा संहति का कोई व्यक्ति 5 मी लम्बी रस्सी से लटके हुए झूले में बैठा है। झूले को एक ओर इतनी दूर तक खींचा गया कि रस्सी का ऊर्ध्व-दिशा से 30° का कोण बना। व्यक्ति की गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा में कितनी वृद्धि हुई है? उस स्थान पर गुरुत्वीय त्वरण का मान 9.8 मी से$^{-2}$ है।

चित्र 2.26 एक ओर खींचा हुआ झूला (पृथ्वी के सापेक्ष झूले की स्थितिज ऊर्जा बढ़ जाती है) AB = AB′ = 5 मी

यदि व्यक्ति की धरती से ऊँचाई में वृद्धि h है, तो

$h=AB-AC$

$=5-5\cos30°=5(1-\cos30°)$

$=5(1-\sqrt{3}/2)=0.670$ मी

व्यक्ति की स्थितिज ऊर्जा में वृद्धि $=mgh$

$=50\times9.8\times0.670$

$=328.3$ जूल (J)

उदाहरण 2.14

0.03 किग्रा संहति की एक गोली 400 मी से$^{-1}$ के वेग से चलते हुए स्थिर लकड़ी के एक गुटके में 12 सेमी तक भीतर धँस जाती है। लकड़ी के गुटके द्वारा गोली पर लगाए गए औसत बल की गणना कीजिए।

लकड़ी के गुटके से टकराने से पूर्व गोली की गतिज ऊर्जा $=\frac{1}{2}\times0.03\times(400)^2$ जूल (J).

यह गतिज ऊर्जा लकड़ी के औसत प्रतिरोधी बल के विरुद्ध कार्य करने में पूरी व्यय हो गई।

इसलिए,

$F\times0.12=\frac{1}{2}\times0.03\times(400)^2$

अतः,

$F=2\times10^4$ न्यूटन (N)

उदाहरण 2.15

72 किमी/घण्टा की चाल से चलती हुई एक कार जब एक चिकने चढ़ाव के तल पर पहुँची, उसका इंजन बन्द कर दिया गया। रुकने तक कार चढ़ाव पर कितनी दूर चल लेगी। चढ़ाव के समतल का क्षैतिज से कोण 30° है और उस स्थान पर गुरुत्वीय त्वरण का मान 9.8 मी से$^{-2}$ है।

कार की चाल = 72 किमी घण्टा$^{-1}$

$$=\frac{72\times10^3}{60\times60}\Rightarrow20 \text{ मी से}^{-1}$$

चढ़ाव पर चढ़ने से पहले कार की

गतिज ऊर्जा $=\frac{1}{2}m(20)^2$ जूल (J)

यहाँ m कार की संहति है। यह ऊर्जा चढ़ाव में कार पर लगने वाले गुरुत्वीय बल के घटक के विरुद्ध कार्य करने में पूरी व्यय हो जाती है।

चढ़ाव के समान्तर नीचे की दिशा में गुरुत्वीय बल का घटक $= mg\ \sin\theta = m \times 9.8 \times \sin\ 30°$

यदि कार रुकने से पहले चढ़ाव पर s दूरी तय कर लेती है, तो

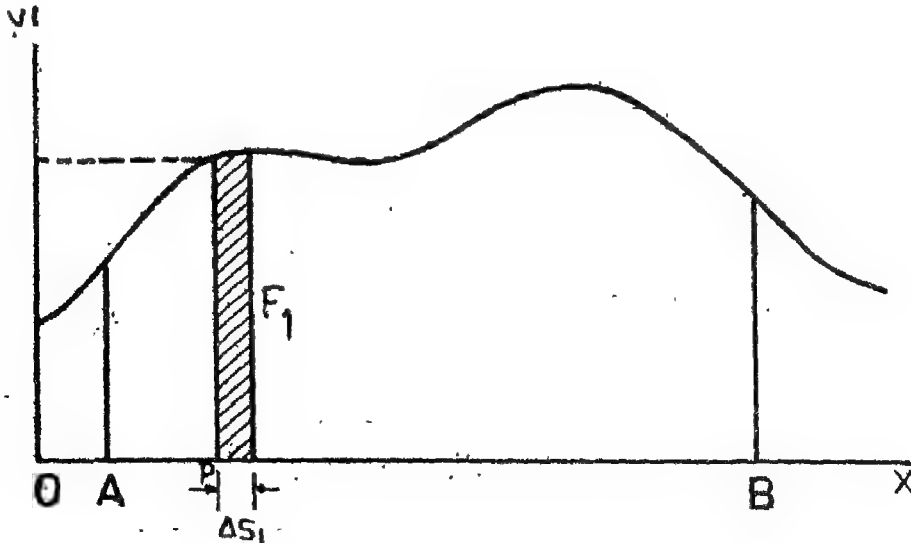
$$(m \times 9.8 \times \sin\ 30°) \times s = \frac{1}{2}m\ (20)^2$$

हुआ, अतः, $s = 40.8$ मी

2.24 चर बल के विरुद्ध सम्पन्न कार्य (Work done against a variable force)

वास्तविक परिस्थितियों में सदा ऐसा नहीं होता, कि किसी पिण्ड पर कार्यकारी बल का परिमाण अचर ही हो। जैसे, प्रत्यास्थता की सीमा के भीतर, यदि किसी प्रत्यास्थी डोरी को खींचा जाए तो उसमें उत्पन्न प्रतिबल उसकी लम्बाई-वृद्धि के अनुपात में होता है। इस प्रकार से, डोरी को खींचकर लम्बा करने की क्रिया में उसमें उत्पन्न प्रतिबल के विरुद्ध काय करना पडता है।

बल यदि चर राशि हो, तो कार्य का मान ज्ञात करने के लिए ग्राफीय विधि का प्रयोग कर सकते है। सरलता के लिए, मानिए कि विस्थापन बल के समान्तर है। चित्र 2.27 में बल के चर होने की दशा में बल और विस्थापन का ग्राफ खीचकर दिखाया गया है।

चित्र 2.27 में दिखाए अनुसार, P बिन्दु के पश्चात् एक अत्यन्त छोटे विस्थापन ds_1 की कल्पना कीजिए और $OP = s$, है। इस छोटे विस्थापन में लगे हुए बल का परिमाण मानिए कि, F_1 है। पूरे विस्थापन ds_1 की अवधि में बल लगभग अचर रहेगा। इस विस्थापन में किया गया कार्य $W = F_1 . ds_1$ है। चित्र में रेखांकित आयत का क्षेत्रफल $F_1 . ds_1$ के बराबर है। माना कि हमें किसी विस्थापन AB में किए गए कार्य का मान निकालना है। पूरे विस्थापन AB को बहुत से छोटे-छोटे विस्थापनों में बाँटा जा सकता है, और तब इसमें हुआ कार्य इन छोटे-छोटे विस्थापनों को आधार बनाए हुए आयतो के क्षेत्रफलों के योग के बराबर होगा। उस चरम स्थिति में, जब $s \rightarrow O$ हो, इन आयतों की संख्या अनन्त की ओर प्रवृत होगी। तब सभी आयतों के क्षेत्रफलों का योग बल-विस्थापन-चक्र के भीतर आए क्षेत्रफल के बराबर होगा। अर्थात्, उस क्षेत्र के क्षेत्रफल के बराबर होगा

चित्र 2.27 बल-विस्थापन वक्र (OX = विस्थापन; OY = बल)

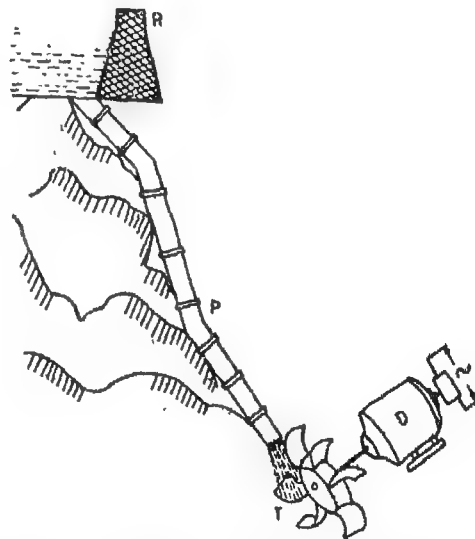
जो बल-विस्थापन-चक्र, विस्थापन-रेखा और AB तथा AB पर बनी कोटि-रेखाओ से घिरा हुआ है। अतः, कार्य का मान इस क्षेत्रफल के बराबर हुआ। अवकलन गणित की भाषा में :

$$W = \int_{s=OA}^{s=OB} F ds. \qquad (2.31)$$

2.25 ऊर्जा (Energy)

ऊर्जा के कई रूप हम जानते है, जैसे यांत्रिक-ऊर्जा, ऊष्मा, प्रकाश, विद्युत् ध्वनि, रासायनिक-ऊर्जा और द्रव्य-मान ऊर्जा। आदि युग का मानव पत्थरों को रगड़कर आग उत्पन्न करता था। हम लोग भी अपने अनुभव से यह जानते है कि सर्दी के मौसम में जब ठंड अधिक लगती हो तो दोनों हाथों को आपस में रगड़ने से कुछ गर्मी आ जाती है। सामान्यतः, किसी खुरदरी सतह पर किसी पिण्ड को चलाने से घर्षण के प्रतिरोधी बल के विरुद्ध कार्य होता है, और यह ऊष्मीय ऊर्जा के रूप में प्रगट होता है। इस प्रकार की सभी क्रियाओं में यांत्रिक ऊर्जा ऊष्मीय ऊर्जा में रूपान्तरित होती है।

यदि कोई गेंद किसी ऊँचाई से गिरकर भूमि तल पर पहुँचे और भूमि से उसकी टक्कर यदि अप्रत्यास्थी हो, तो यह गेंद गद्दा खाकर वहाँ तक नहीं पहुँचेगी जहाँ से कि वह गिराई गई थी। इस दशा में, टक्कर के बाद का गेंद का वेग इसके पूर्व के मान से कम होगा। गेंद की गतिज ऊर्जा का ह्रास होकर उसका एक बड़ा अंश, टक्कर के दौरान, ऊष्मीय ऊर्जा में, और कुछ अंश ध्वनि-ऊर्जा में भी रूपान्तरित हो जाएगा। जब कोयले को जलाते हैं, तो उसकी रासायनिक ऊर्जा ऊष्मा के रूप में निकलने लगती है। इस ऊष्मीय ऊर्जा को पानी गरम करके भाप बनाने, और फिर उसके द्वारा वाष्प-इंजन चलाने के काम में ले सकते हैं। इस प्रकार, रासायनिक ऊर्जा का पहले ऊष्मीय और तदुपरान्त यान्त्रिकी ऊर्जा मे रूपान्तरण किया गया।

जलविद्युत् के उत्पादन में, ऊँचाई से बहकर आते हुए पानी में जो यांत्रिक ऊर्जा होती है, उसका विद्युत-ऊर्जा में रूपान्तरण होता है। जलविद्युत् घर वही बनाए जाते है, जहाँ या तो नदी का बहाव सीधे ढाल पर हो रहा हो, या उसके निकट कोई जलप्रपात हो। जहाँ जल-प्रपात है, उससे थोड़ा ऊपर पानी को रोककर जमा करने के लिए एक बाँध बना दिया जाता है। जलप्रपात की निचाई पर जलविद्युत् घर बना देते है, और बांधित पानी के जलाशय से पानी को बहाव पाइपों द्वारा नियंत्रित करके जलविद्युत् घर तक पहुचाया जाता है। यह बहाव बड़ा उग्र होता है, और टरबाइन के पखों से टकरा कर इसे तेजी से घुमा देता है (चित्र 2.28)। टरबाइन डाइनेमो के रोटर से जुड़ी होती है, और इस प्रकार विद्युत् उत्पन्न होती है।

चित्र 2.28 जलविद्युत् उत्पादन का सिद्धान्त, R=रिजरवायर, P=पेनस्टोक पाइप, D=डाइनेमो, T=पानी का टरबाइन

भारत में अब अनेक जलविद्युत् घर बन कर तैयार हो चुके है। कुछ मुख्य जलविद्युत् प्रायोजनाएँ ये है :

भाखरा-नांगल प्रायोजना, बेरा-सियुल प्रायोजना, मचकुण्ड और सिलेरु प्रायोजनाएँ, कुण्डा प्रायोजना, श्रीशैलम प्रायोजना और मैट्टूर प्रायोजना। कोयला अथवा खनिज तेलों को जलाकर विद्युत् उत्पन्न करने में जो खर्च आता है, जलविद्युत् का खर्च उसकी तुलना में कम पड़ता है। एक और मुख्य बात जो जलविद्युत् के पक्ष में है, वह यह है कि किसी देश के कोयले और

खनिज तेलों के भण्डार तो सीमित ही होते हैं, जबकि **जल** के विषय में ऐसी बात नहीं है।

विद्युत्-धारा को उच्च-वोल्टता केबिलों में प्रवाहित करके उन स्थानों तक पहुँचाया जाता है, जहाँ उसे तरह-तरह के उपयोगी कामों में बरता जाता है। घर-गृहस्थी में बिजली का उपयोग मुख्यतः रोशनी, गर्मी और पंखों के चलाने में होता है। ये तीनों उपयोग विद्युत् के क्रमशः प्रकाश, ऊष्मा और यांत्रिक-ऊर्जा में रूपान्तरण के उदाहरण हैं। कारखानों में विद्युत् का उपयोग मुख्यतः बिजली के मोटरों से मशीनों को चलाने में होता है।

1905 ई० में आइन्सटाइन ने संहति और ऊर्जा की समतुल्यता के सिद्धान्त का प्रतिपादन किया और यह स्थापना की, कि उन दोनों में एक सम्बन्ध है जिसे निम्नलिखित समीकरण द्वारा व्यक्त कर सकते हैं :

$$E = mc^2 \qquad (2.32)$$

इसमें E ऊर्जा, m संहति और c प्रकाश के वेग के लिए प्रयुक्त प्रतीक हैं। c का मान 3×10^8 मी से$^{-1}$ है, अतः एक ग्राम जितनी छोटी संहति की मात्रा का ऊर्जा समतुल्यांक $(10^{-3})\ (3 \times 10^8)^2$, अर्थात्, 9×10^{13} जूल (J) जितनी बड़ी राशि है। ब्रह्माण्ड में व्याप्त ऊर्जा मुख्यतः इसी संहति-ऊर्जा के रूप में ही है। यद्यपि न्यूक्लीय अन्योन्य-क्रियाओं, जैसे नाभिकीय विखंडन और नाभिकीय संलयन में संहति के एक अत्यल्प अंश का ऊर्जा में रूपांतरण हो जाता है, तथापि संहति को पूरी तरह से ऊर्जा में बदल देना हम अभी नहीं जानते। सूर्य जो ऊर्जा निरंतर उत्सर्जित कर रहा है, वह उसमें निरन्तर होने वाले हाइड्रोजन नाभिकों के संलयन और इस क्रिया में होने वाले संहति के कुछ अंश के ऊर्जा में रूपान्तरण के फलस्वरूप प्राप्त होने वाली ऊर्जा है।

2.26 ऊर्जा का संरक्षण (Conservation of energy)

हम देख चुके हैं, कि यदि ऊर्जा किसी एक रूप में लोप होती है तो किसी दूसरे रूप में प्रकट हो जाती है। ऊर्जा का विनाश नहीं होता। किसी निकाय में समस्त ऊर्जा निरन्तर उतनी ही बनी रहती है। ऊर्जा संरक्षण के इस नियम को हम इस प्रकार स्थापित कर सकते हैं :

"ऊर्जा का न जन्म होता है, न विनाश। इसका केवल रूपान्तरण ही हो सकता है। किसी निकाय की समस्त ऊर्जा उतनी ही बनी रहती है।"

संवेग संरक्षण के सिद्धान्त की तरह ऊर्जा संरक्षण का सिद्धान्त भी भौतिकी का मूल सिद्धान्त है।

2.27 शक्ति (Power)

सड़क के रोलर को कुछ दूरी तक धकेलने में कार्य करना पड़ता है। अब उतनी दूरी चाहे **2** घंटे में तय की जाय या 10 घंटे में, कार्य का परिमाण समान ही रहेगा। परन्तु, कार्य करने की दरें दोनों दशाओं में एक समान नहीं हैं। **कार्य करने की काल-दर शक्ति कहलाती है।**

MKS पद्धति में 1 जूल प्रति सेकंड कार्य करने की दर शक्ति की इकाई होती है। इसका मात्रक वाट (प्रतीक W) है, जो वाष्प-इंजन के आविष्कारक जेम्स वाट के नाम पर है।

CGS पद्धति में एक अर्ग प्रति सेकंड शक्ति की इकाई है। व्यवहार में शक्ति का एक और मात्रक प्रयोग में आता है जिसे **हॉर्स-पावर** (H.P.) कहते हैं। एक हॉर्स-पावर 746 वाट के बराबर होता है।

यदि कार्य करने की दर अचर हो, तो t अवधि में किया गया कार्य$=$शक्ति$\times t$

बिजली के बल्बों की क्षमता को प्रायः वाट में ही लिखते हैं। 40 वाट का बल्ब 40 जूल प्रति सेकण्ड की दर से ऊर्जा की खपत करता है। यदि ऐसा कोई बल्ब एक घंटे तक जलता रहे तो इसमें $40 \times 60 \times 60$ जूल की ऊर्जा व्यय होगी। इस राशि को (शक्ति का मात्रक) $\times$ (काल), ऐसा करके वाट-घंटा के पद में भी व्यक्त कर सकते हैं। उपर्युक्त उदाहरण में बल्ब 40 वाट-घंटे की ऊर्जा व्यय करेगा। यह ध्यान रहे, कि वाट-घंटा ऊर्जा का मात्रक है, शक्ति का नहीं। विद्युत्-ऊर्जा की खपत को किलोवाट-घंटा (kwh) में मापते हैं। एक किलोवाट-घंटा$=$1000 वाट घंटा।

1 किलोवाट-घंटा (khw)

$= 1000 \times 60 \times 60 = 36 \times 10^5$ जूल (J)

उदाहरण 2.16

किसी घर में 5 बल्ब 40 वाट और 5 बल्ब 60 वाट की क्षमता के लगे हैं। यदि वे (पूरी क्षमता से) दिन में 8 घंटे जलें, तो कितनी ऊर्जा व्यय होगी ?

दिन में व्यय हुई ऊर्जा

$=(5\times40+5\times60)\times8$ वाट-घंटा

=4000 वाट-घंटा

=4 किलोवाट घंटा

उदाहरण 2.17

कोई मोटरबोट 20 मी $से^{-1}$ की एकसमान चाल से चल रही है। यदि इसकी गति में पानी का प्रतिरोध 6000 न्यूटन (N) का लग रहा हो तो इंजन की शक्ति ज्ञात कीजिए।

इंजन की शक्ति=इसके द्वारा कार्य करने की दर

$=6000\times20$ जूल प्रति सेकण्ड

$=12\times10^4$ वाट (W)

उदाहरण 2.18

पानी की एक टंकी की क्षमता 6000 लिटर है। इसे भरने के लिए एक पम्प-सेट लगाया गया है, जो 20 मी की औसत ऊँचाई तक पानी को खींचकर इसे भरता है। यदि टंका का पूरा भरने में 1 घंटा लगता हो, तो ज्ञात कीजिये कि कितना कार्य सम्पन्न हुआ, और, यदि पम्प-सेट की दक्षता 60% हो, तो इसमें कितनी शक्ति लगी। गुरुत्वीय त्वरण का मान 9.8 मी $से^{-2}$ है।

1 लिटर जल की संहति=1 किग्रा

इसलिये, उठाये गये पानी की संहति=6000 किग्रा

सम्पन्न कार्य $=6000\times9.8\times20$

$=11.76\times10^5$ जूल

किन्तु, क्योंकि दक्षता 60% है, इसलिये पम्प-सेट को दी गई शक्ति

$$=\text{कार्य}\times\frac{100}{60}\times\frac{1}{\text{अवधि (सेकण्ड)}}$$

$$=\frac{11.76\times10^5\times100}{60\times60\times60}$$

=544.4 वाट

2.28 घर्षण (*Friction*)

गति के नियमों का अध्ययन करते समय हम इस बात का उल्लेख कर चुके हैं, कि प्रकृति में सर्वथा चिकने पृष्ठ दुष्प्राप्य हैं। इसकी निकटतम समानता के लिये हमने "वायु-लीक" का वर्णन किया था, जिसमें पृष्ठों के बीच घर्षण को काफी हद तक कम कर देने के अभिप्राय से गाड़ी के नीचे वायु का एक "गद्दा" बना दिया जाता है।

माना कि किसी क्षैतिज समधरातल पर कोई ब्लाक रखा है। अब यदि हम इसे एक धक्का देकर छोड़ दें, तो धीरे-धीरे वेग कम होते हुये अन्त में यह रुक जायेगा। वेग में यह मन्दन ब्लाक और धरातल के परस्पर संपर्क में आए हुए पृष्ठों के बीच घर्षण के कारण है। घर्षण के इस बल का परिमाण संपर्क में आए पृष्ठों के स्वरूप पर निर्भर करता है। घर्षण का होना हमारे नित्य-प्रति के जीवन में उपयोगी भी है। हमारे पैरों और धरती के बीच घर्षण होने के कारण ही हम चल पाते हैं, अन्यथा, सर्वथा चिकने तल पर फिसलन होगी और चलना संभव नहीं होगा। हममें से प्रत्येक ने कभी-न-कभी यह अनुभव अवश्य किया होगा कि चिकने—विशेषकर तेल से चिकने—फर्श पर फिसलन होती है।

2.29 घर्षण की उत्पत्ति (Origin of friction)

बहुत अच्छी तरह पालिश किये हुए पृष्ठ भी, यदि उन्हें सूक्ष्मदर्शी में देखें, तो, बिम्ब और विषमताओं से भरे

चित्र 2.29 परस्पर स्पर्श करते हुये दो पिंडों का पृष्ठ। चित्र में यह दिखाया गया है कि किसी सेक्शन का आवर्धित प्रतिबिम्ब कैसा दिखता है।

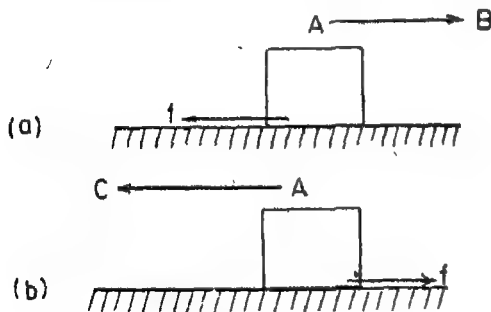
होते हैं [चित्र 2.29]। संपर्क में रखते हुये जब एक पृष्ठ को दूसरे के सापेक्ष सरकाते हैं, तो पृष्ठ की इन विषमताओं के कारण सापेक्ष गति के प्रतिरोध में एक बल उत्पन्न हो जाता है। यही घर्षण का बल होता है। जैसे-जैसे सरकाने वाला बल बढ़ाया जाता है प्रतिरोध बल भी

तैसे-तैसे बढ़ता जाता है, किन्तु एक ऐसी स्थिति भी आती है जब पृष्ठ सरकने लगता है।

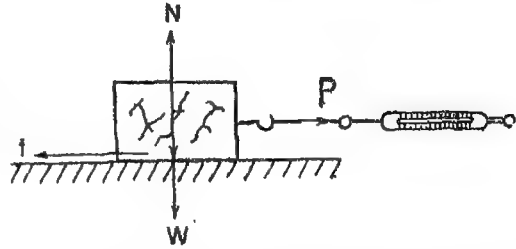
2.30 घर्षण का स्वरूप (Nature of friction)

जब कभी किसी पिण्ड की सतह किसी दूसरे पिण्ड की सतह पर सरकती है, तो उनमें से प्रत्येक पिण्ड एक दूसरे पर सतह के समान्तर घर्षण-बल लगाता है। प्रत्येक पिण्ड पर लगने वाला यह घर्षण-बल उस पिण्ड की, दूसरे के सापेक्ष, गति की दिशा की विपरीत दिशा में होता है।

क्षैतिज समतल पर ब्लॉक के जिस उदाहरण का हम अभी उल्लेख कर चुके हैं, उसमें यदि ब्लाक AB दिशा में सरके [चित्र 2.30(a)] तो घर्षण बल AB की विपरीत दिशा में लगेगा। यदि दिशा बदल कर ब्लॉक AC दिशा में सरके [चित्र 2.30(b)], तो घर्षण-बल f भी दिशा बदलकर AC की विपरीत दिशा में लगने लगेगा। घर्षण हमेशा गति का विरोध करता है।

माना कि एक ब्लॉक क्षैतिज मेज पर रखा है। यदि इस पर कमानीदार तुला द्वारा AB दिशा में कोई बल

चित्र 2.30 खुरदरे क्षैतिज पृष्ठ पर गुटका। जिस दिशा में पिंड सरकता है, घर्षण बल उसकी विपरीत दिशा में होता है।

लगायें (चित्र 2.31), और यदि ब्लॉक सरकता नहीं है, तो इसके अर्थ यह हुए कि प्रत्युत्पन्न घर्षण-बल इतना है कि वह f को निरस्त कर रहा है। इसे स्थैतिक घर्षण कहते हैं। इससे हम देखते है,कि यदि सापेक्ष गति न भी हो, तो भी घर्षण-बल लग रहा होता है।

यदि कमानीदार तुला को खींच कर ब्लाक पर खिंचाव बढ़ायें, तो घर्षण-बल का परिमाण भी बढ़ेगा, और पिण्ड विश्राम स्थिति में ही तब तक बना रहेगा जब तक कि स्थैतिक घर्षण-बल अपने अधिकतम मान को प्राप्त

चित्र 2.31 कमानी तुला द्वारा खिंचता गुटका। जैसे-जैसे गुटके पर लगाया बल बढ़ता है वैसे-वैसे घर्षण का बल बढ़ता है जिससे पिंड विराम अवस्था में रहता है।

नहीं कर लेता। उसके पश्चात यदि ब्लॉक पर खिंचाव का बल P विपरीत दिशा में प्रत्युत्पन्न स्थैतिक घर्षण-बल के अधिकतम मान f_{ms} से अधिक हो जायेगा, तो ब्लॉक सरकने लगेगा। जब ब्लॉक सरकने लगा, तो घर्षण-बल का मान भी, देखेंगे, कि कम हो जायेगा। इस नये घर्षण-बल को गतिज घर्षण-बल अथवा सर्पी घर्षण-बल कहते हैं। गतिज घर्षण-बल f_k का मान स्थैतिक घर्षण-बल f_{ms} से कम होता है। इसलिये, ब्लॉक के सरकने के समय उस पर परिणामी बल $f_{ms}-f_k$ लगेगा। इसके कारण ब्लॉक में त्वरण उत्पन्न होगा। इस दशा में यदि P का मान घटा कर इतना कर दिया जाय कि यह f_k के बराबर हो जाय तो ब्लॉक एक समान वेग से सरकता रहेगा।

यहाँ इस बात का उल्लेख कर देना आवश्यक है कि घर्षण के विरुद्ध दूरी तय करने में किया गया कार्य जो $\Sigma f_k . \Delta s$ के बराबर है, ब्लॉक में गतिज ऊर्जा उत्पन्न नहीं करता। यह ऊष्मा उत्पन्न करने में व्यर्थ हो जाता है।

ब्लॉक का भार W सीधा नीचे की ओर लगता है। क्योंकि, ऊर्ध्वाधर दिशा में इसमें कोई गति नहीं हो रही, मेज द्वारा ब्लॉक पर लम्बवत् लगाया गया प्रतिक्रिया का बल भार को संतुलन में रखता है। स्पष्ट है कि प्रतिक्रिया का बल N जो मेज के लम्बवत् अर्थात् सीधा ऊपर की दिशा में है, परिमाण में भार के बराबर ही होगा।

2.31 घर्षण के नियम (Laws oı friction)

"शुष्क घर्षण" (अर्थात् जब संस्पर्श-पृष्ठ सूखे और बिना स्नेहित हुए हों) के लिये किये गये विविध प्रयोगों के आधार पर स्थैतिक-घर्षण के अधिकतम बल के लिये निम्नलिखित दो अनुभाविक नियम बनाये गये है।

(1) स्थैतिक घर्षण का अधिकतम बल संस्पर्श-पृष्ठों के क्षेत्रफल पर निर्भर नही करता।

(2) स्थैतिक घर्षण का अधिकतम बल इसके लंबवत् लगने वाले बल के समानुपाती होता है।

विचाराधीन संस्पर्शी-पृष्ठयुग्मों के लिए अधिकतम स्थैतिक घर्षण-बल और लम्बवत्-बल के अनुपात को स्थैतिक-घर्षण-गुणांक कहते हैं। इसके प्रतीक के लिए सामान्यतः μ_s लिखते हैं। यदि स्थैतिक घर्षण का अधिकतम बल f_{ms} हो और लम्बवत् बल N हो तो

$$\frac{f_{ms}}{N} = \mu_s$$

या,

$$f_{ms} = \mu_s . N \qquad (2.33)$$

यदि P का मान f_{ms} से कम हो, तो प्रत्युत्पन्न स्थैतिक घर्षण-बल अपने अधिकतम मान, अर्थात् $\mu_s N$ से कम होगा। गणित की भाषा में

$$f_s \leq \mu_s N$$

गतिज घर्षण (Kinetic friction) : शुष्क, बिना स्नेहित पृष्ठों के लिए, गतिज घर्षण के लिए भी दो आनुभाविक नियम बनाये गये हैं, जो स्थैतिक घर्षण के समान हैं।

गतिज घर्षण-बल और लम्बवत्-बल के अनुपात को गतिज घर्षण-गुणांक, या सर्पी घर्षण-गुणांक, कहते हैं। इसके प्रतीक के रूप में μ_k लिखते हैं। समीकरण (2.33) के समान,

$$f_k = \mu_k — N \qquad (2.34)$$

होता है। क्योंकि $f_{ms} > f_k$ इसलिये, $\mu_s > \mu_k$, μ_s, और μ_k पृष्ठों के स्वभाव पर निर्भर अचर राशियाँ हैं।

उदाहरण 2.19

4 किग्रा संहित का एक बक्स किसी नत समतल पर रखा हुआ है। समतल की क्षैतिज के साथ नति को धीरे-धीरे बढ़ाने पर पाया गया कि जब समतल की नति 3 में 1 हो जाती है तो बक्स समतल पर नीचे सरकने लगता है। g का मान 9.8 मी से$^{-2}$ है। ज्ञात कीजिये, कि

1 (a) बक्स और समतल के बीच घर्षण-गुणांक का मान कितना है ?

1 (b) समतल के समान्तर बक्स पर कितना बल लगाया जाये, कि यह ऊपर उठने लगे ?

यह दिया हुआ है कि समतल की नति 3 में 1 है। उसके अर्थ यह हुए कि

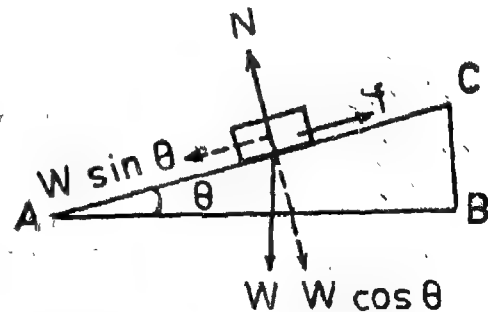
$$\frac{\text{समतल की ऊँचाई BC}}{\text{समतल की लम्बाई AC}} = \frac{1}{3}$$

अर्थात्, $\sin\theta = \frac{1}{3}$

भार W को हम समतल के समानान्तर घटक W sinθ और उसके लम्बवत् घटक W cosθ में वियोजित कर सकते हैं।

यदि N लम्बवत्-बल हो और F घर्षण-बल, तो जब बक्स सरकने लगे, उस समय बलों के सन्तुलन के लिये

$$f = W \sin\theta \qquad (2.35)$$

$$N = W \cos\theta \qquad (2.36)$$

चित्र 2.32 नत समतल पर एक बक्स जब सरकना प्रारम्भ होता है तब $\tan\theta = \mu$
(f घर्षण का बल तथा N अभिलम्ब दिशा का बल है)

तालिका 2.1

घर्षण-गुणांकों के सन्निकट[1] मान

संस्पर्शी पष्ठ	दशा	घर्षण-गुणांक	
		गतिज	स्थातक
इस्पात-इस्पात	शुष्क	0.18	0.25
इस्पात-काष्ठ	शुष्क	0.20	0.40
काष्ठ-काष्ठ	शुष्क	0.25	0.50
चमड़ा-काष्ठ	शुष्क	0.40	0.55
पत्थर-कंक्रीट	शुष्क	0.45	0.75
इस्पात-इस्पात	ग्रीज़ लगी	0.05	0.10
कार टायर-कंक्रीट	सामान्य रफ्तार	0.40	0.60

$$\therefore \quad \frac{f}{N}=\tan\theta=\frac{1}{\sqrt{3^2-1^2}}$$

$$\therefore \quad \mu=\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

(b) माना कि बाक्स को ऊपर बढ़ाने के लिए आवश्यक न्यूनतम बल F है, तो उस स्थिति के लिए

$$F=W\sin\theta+f$$

क्योंकि घर्षण-बल f अब समतल के नीचे की दिशा में लग रहा है, इसलिए f का मान समीकरण (2.35) में रखने पर हमें प्राप्त होगा,

$$F=W\sin\theta+W\sin\theta=2W\sin\theta$$
$$=2\times4\times\frac{1}{3}\times9.8$$
$$=26.13 \text{ न्यूटन (N)}$$

हमने ऊपर के उदाहरण में यह देखा है, कि जैसे-जैसे समतल का क्षैतिज से नति-कोण बढ़ता जाता है, वैसे-वैसे कोण θ के एक विशेष मान प्राप्त होने पर, फिसलन प्रारंभ हो जाती है। नति-कोण के इस मान को स्थैतिक घर्षण का कोण कहते हैं। इसका मान, जैसा स्पष्ट है, संस्पर्श पृष्ठों के स्वभाव पर निर्भर करता है। यह उल्लेखनीय है, कि $\tan\theta=\mu$

2.32 लोटनिक घर्षण (Rolling friction)

यदि कोई पिण्ड किसी दूसरे के ऊपर लुढ़के, तो प्रत्युत्पन्न घर्षण-बल लोटनिक घर्षण का बल कहलाता है, और तदानुसार गुणांक लोटनिक घर्षण-गुणांक μ_r कहलाता है। संस्पर्शीय पृष्ठों के समान होने पर, उनके μ_r का मान μ_s से बहुत कम होता है। क्योंकि लोटनिक-घर्षण सर्पी-घर्षण की तुलना में बहुत कम होता है, इसलिए नित्य-प्रति के जीवन में पहिये का इतना अधिक महत्त्व है। भरी हुई गाड़ी को पहियों पर चलाना भूमि पर घसीट कर ले जाने की अपेक्षा कहीं अधिक सरल है।

2.33 स्नेहन (Lubrication)

इस अध्याय के प्रारम्भ में हम इस बात का उल्लेख कर चुके हैं, कि भूमि और हमारे पैरों के बीच घर्षण होने के कारण ही हम चल पाते हैं। घर्षण के कारण ही हम

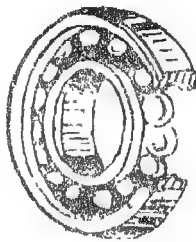
---

1 ये केवल प्रतिरूपी मान है। पृष्ठों की दशा, काष्ठ के खुरदरापन, संदुषण और नमी आदि में परिवर्तन होने पर इनका मान बहुत भिन्न हो सकता है।

कीलों के द्वारा लकड़ी के दो टुकड़ों को परस्पर जोड़ सकते हैं। यहाँ घर्षण कीलों और लकड़ी के बीच में होता है। जब किसी चलती साईकिल पर ब्रेक लगाये जाते हैं, तो ब्रेक के ब्लॉक पहियों के सम्पर्क में आते हैं और पहिए और ब्लॉक के बीच घर्षण के कारण साईकिल की चाल कम हो जाती है।

यद्यपि घर्षण अनेक स्थितियों में हमारा सहायक होता है, तथापि कुछ अन्य स्थितियों में यह हमारे लिए बाधा भी उत्पन्न करता है। मशीनों में, यदि उनके गतिशील अवयवों के बीच घर्षण हो, तो बहुत सारी ऊर्जा इस घर्षण के प्रतिरोध के विरुद्ध काम करते हुए ऊष्मा में रूपान्तरित हो जायेगी। इस प्रकार घर्षण मशीन के गतिशील अवयवों को घिसने के अतिरिक्त उनमें ऊष्मा उत्पन्न करके मशीन को बुरी तरह क्षति भी पहुँचा सकता है।

ऐसी स्थितियों में उपयुक्त पृष्ठों का चुनाव करके, और उनको स्नेहित कर घर्षण को कम किया जा सकता है। यह हम पहले ही कह चुके हैं, कि लोटनिक घर्षण सर्पी-घर्षण की तुलना में बहुत कम होता है। इसी तथ्य का लाभ उठा कर मशीनों में, उनके गतिशील अवयवों को कठोर पदार्थों से बना कर और उनके बीच कठोर रोलर अथवा गोलियाँ रखकर, घर्षण को बहुत कम कर दिया जाता है। यदि बॉल-बेयरिंगों के धात्वीय पृष्ठ कठोर नहीं होंगे, तो उनके बीच घर्षण अधिक होगा। यही कारण है कि बॉल-बेयरिंगों में कठोर इस्पात की गोलियाँ लगाई जाती हैं।

बड़ी मशीनों के हलके चलने, और उनके अवयवों को गरम होने से बचाने के लिए, उनमें किसी तेल अथवा अन्य स्नेहक पदार्थ को निरन्तर डालते रहने का प्रबन्ध किया जाता है। ग्रीज अथवा तेल लगी सतहों पर फिसलन सूखी सतहों की अपेक्षा अधिक सरलता से होती है। स्नेहक का इस्तेमाल करने से गतिमय अवयव हल्के चलते हैं, और घिसते भी कम हैं।

बाल बेयरिंग
चित्र 2.33 (बाल बेयरिंग में आपेक्षिक गति दर्शाते हुए भाग)

स्नेहक पदार्थ के रूप में हवा के उपयोग की बहुत सी सम्भावनायें हैं। शोधी हुई हवा दबाकर स्नेहक के रूप में प्रयुक्त की जाती है। गतिशील अवयवों के बीच में यह एक प्रत्यास्थी गद्दे के रूप में फैल जाती है, और घर्षण तथा उसमें उत्पन्न गर्मी की समस्या को दूर कर देती है। दबी हवा मशीन के बाहर तेजी से निकलती है, और इस प्रकार मशीन के अन्दर धूल आदि के जाने को भी रोकती है। हूवर-क्राफ्ट के चलने में जो सिद्धान्त लगता है, वह यही है कि किसी गाड़ी को अत्यन्त दबी हुई हवा से बने हुए गद्दे के ऊपर तैरा कर ले जाने में भूमि से उसका घर्षण समाप्त कर दिया जाता है।

प्रश्न-अभ्यास

2.1 सदिश तथा अदिश राशियों का अन्तर बताइये और उदाहरण दीजिए।

2.2 यदि तीन सदिश एक ही समतल में न हों तो क्या उसका परिणामी शून्य हो सकता है? क्या चार सदिशों का परिणामी शून्य हो सकता है?

2.3 यदि $\mathbf{A.B}=\mathbf{C.B}$ तो यह आवश्यक नहीं है कि $\mathbf{A}$ तथा $\mathbf{C}$ परस्पर बराबर हों। किस स्थिति में $\mathbf{A}$ तथा $\mathbf{C}$ बराबर होंगे?

2.4 सदिशों के व्यवकलन के लिए क्या क्रम विनिमय तथा साहचर्य नियम लागू होते है ?

2.5 यदि किसी पिंड की चाल अचर हो तो क्या उसकी गति में त्वरण हो सकता है ?

2.6 किन स्थितियों मे किसी लिफ्ट के तार पर खिचाव (यदि द्रव्यमान अचर हो) अधिकतम और कब न्यूनतम होगा ?

2.7 किसी मालगाड़ी में पचीस डिब्बे है। क्या चौथे और पाँचवें डिब्बों के बीच के संयोजक में उतना ही तनाव होगा जितना इक्कीसवे और बाइसवे डिब्बो के बीच के संयोजक में होगा ?

2.8 आप दो पिंडों के जडत्वीय द्रव्यमानों की तुलना कैसे करते है ?

2.9 प्रक्षेपण के वेग के परिमाण को स्थिर रखने पर किसी प्रक्षेप्य का परास प्रक्षेपण के कोण पर कैसे निर्भर करता है ? क्या कोण का कोई सर्वोत्तम मान होता है जिससे परास अधिकतम हो सके ?

2.10 किसी ताप विद्युत् स्टेशन में विद्युत् उत्पादन के लिए कोयले का उपयोग होता है। यह बताइये कि विद्युत् ऊर्जा में परिवर्तित होने के पहले ऊर्जा कैसे एक रूप से दूसरे रूप में परिवर्तित होती है ?

2.11 कुछ उदाहरण बताइये जिनमें घर्षण हमारे लिए लाभदायक है ?

2.12 दो पृष्ठों के बीच का घर्षण गुणांक किन बातों पर निर्भर करता है ? स्नेहक का उपयोग घर्षण को कैसे कम करता है ?

2.13 कोई वायुयान क्षैतिज से 30° का कोण बनाता हुआ उड़ता है। यदि क्षैतिज दिशा में इसके वेग का घटक 250 किमी घंटा$^{-1}$ है तो इसका वास्तविक वेग क्या है ? इसके वेग के ऊर्ध्वाधर घटक का मान भी निकालिए।

(288.7 कि मी घंटा$^{-1}$; 144.4 कि मी घंटा$^{-1}$)

2.14 किसी कण का पूर्व दिशा में विस्थापन 12 मी तथा उत्तर दिशा में विस्थापन 5 मी है और फिर ऊर्ध्वाधर दिशा में ऊपर की ओर 6 मी है। इन विस्थापनों के योग का परिमाण निकालिए।

(14.32 मी)

2.15 एक जहाज पश्चिम की ओर 8 मी/से की चाल से चल रहा था। एक नाविक मस्तूल में बोल्ट लगा रहा था, पर बोल्ट उससे छूट कर गिर जाता है। यदि मस्तूल की ऊँचाई 19.6 मी हो तो बोल्ट डेक पर कहाँ गिरेगा ?

2.16 किसी पिंड को विरामावस्था से 150 मी की ऊँचाई से गिराया जाता है। उसी क्षण एक अन्य पिंड को विरामावस्था से पृथ्वी से 100 मी की ऊँचाई से गिराया जाता है। (a) 2 सेकंड, तथा (b) 3 सेकंड के पश्चात् उनकी ऊँचाइयों में क्या अन्तर होता है ? काल के साथ उनकी ऊँचाइयों में परिवर्तन कैसे होता है ?

(50 मी)

2.17 एक गुब्बारा भूमि से 98 मी की ऊँचाई पर 14 मी/से के वेग से ऊपर उठ रहा है। उस समय उस पर से एक पैकेट गिराया जाता है। कितने समय बाद और किस वेग से यह पृथ्वी पर पहुँचेगा ?

($6\frac{1}{7}$ से, 46·02 मी से$^{-1}$)

2.18 एक छतरीधारी सैनिक एक वायुयान से कूदता है और 40 मी तक गिरने के बाद अपनी छतरी खोलता है और तब उसका मंदन 2 मी से$^{-2}$ है। यदि भूमि पर पहुचने समय उसका वेग 2 मी से$^{-1}$ है तो वह कितनी देर तक हवा में था और कितनी ऊँचाई पर वह वायुयान से कूदा ?
(15$\frac{6}{7}$ से, 235 मी)

2.19 किसी रॉकेट में ईंधन जलने की दर 100 किग्रा प्रति सेकंड है। निर्गमित गैसों के निकलने का वेग $4{\cdot}5 \times 10^4$ मी से$^{-1}$ है। रॉकेट द्वारा कितने प्रणोद का अनुभव होता है ? (4.5×10^6N)

2.20 किसी लिफ्ट का भार 4000 कि ग्रा है। यदि इसे उठाने वाले तारों का तनाव 48000 N है तो ऊपर की ओर इसका त्वरण कितना है ? विराम से प्रारम्भ कर के 3 सेकंड में यह कितनी उठती है ?
(2.2 मी से$^{-2}$, 9.9 मी)

2.21 एक लड़का, जिसका द्रव्यमान 50 किग्रा है, एक लिफ्ट के भीतर भार नापने वाली कमानी पर खड़ा है। लिफ्ट ऊपर की ओर 2.45 मी से$^{-2}$ के त्वरण से चलना प्रारम्भ करती है। भार की मशीन का पाठ्यांक क्या है ? यदि ऊपर जाते समय लिफ्ट (a) एक समान वेग से (b) 4·9 मी से$^{-2}$ के मन्दन से चलती है तो पाठ्यांक क्या होंगे ? (62·5 कि ग्रा, 50 कि ग्रा, 25 किग्रा)

2.22 एक न्यूट्रॉन जिसका द्रव्यमान $1{\cdot}67 \times 10^{-27}$ कि ग्रा है और जो 10^6 मी से$^{-1}$ के वेग से चल रहा है, किसी स्थिर ड्यूटेरॉन से टकराता है और उससे चिपक जाता है। यदि ड्यूटेरॉन का द्रव्यमान $2{\cdot}34 \times 10^{-27}$ कि ग्रा है तो संयोजन की चाल ज्ञात कीजिए (संयुक्त कण को ट्राइटॉन कहते हैं)।
($1{\cdot}3 \times 10^6$ मी से$^{-1}$)

2.23 एक गेंद को विराम अवस्था से 12 मी की ऊँचाई से गिराया जाता है। यदि यह भूमि पर गिरने पर अपनी गतिज ऊर्जा का 25% खो देता है तो यह कितनी ऊँचाई तक उठेगा ? खोई हुई गतिज ऊर्जा किस रूप में प्रकट होगी ? (9 मी)

2.24 किसी 2×10^4 कि ग्रा के राकेट को उड़ाते समय उस पर 20 सेकंड तक 5×10^5N का बल लगाया जाता है। 20 सेकंड के बाद रॉकेट का वेग क्या होगा ? (500 मी से$^{-1}$)

2.25 19·5 मी ऊँची किसी इमारत से किसी गेंद को क्षैतिज दिशा में फेंका जाता है। कितने समय बाद वह भूमि पर गिरेगी ? यदि फेंकने के बिन्दु और भूमि पर गिरने के बिन्दु को मिलाने वाली रेखा क्षितिज के साथ 45° का कोण बनाती है तो गेंद को फेंकने का वेग क्या था ? (2 से, 9·8 मी से$^{-1}$)

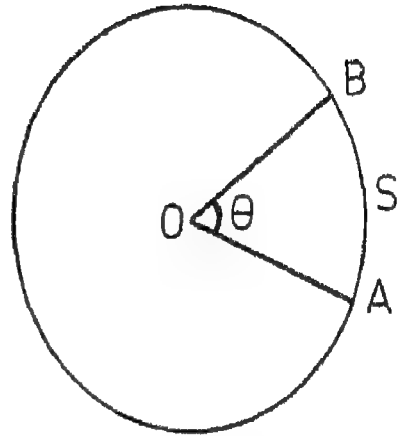
2.26 किसी बम को 1500 मी की ऊँचाई पर उड़ते वायुयान से गिराया जाता है। यदि उस समय वायुयान लक्ष्य के ठीक ऊपर हो और वह क्षैतिज दिशा में 500 कि मी घंटा$^{-1}$ के वेग से जा रहा हो तो बम लक्ष्य से कितनी दूरी पर गिरेगा ? (2431 मी)

2.27 0·01 कि ग्रा द्रव्यमान की किसी गोली को 4 कि ग्रा के लकड़ी के तख्ते में मारा जाता है, जो किसी क्षैतिज पृष्ठ पर रखा है। तख्ते और पृष्ठ के बीच गतिज घर्षण गुणांक 0·25 है। यदि गोली तख्ते में सन्निहित रह जाती है और संयोजन रुकने के पहले 20 मी तक चलती है तो गोली कितने वेग से तख्ते में लगी ? (198·3 मी से$^{-1}$)

2.28 एक ट्रक 1200 कि ग्रा द्रव्यमान के ट्रेलर को समतल सड़क पर 10 मी $से^{-1}$ की चाल से खींचता है। यदि संयोजक का तनाव 1000N है तो ट्रेलर को खींचने में कितनी शक्ति लग रही है ? जब ट्रक 6 में 1 की आनति की सड़क पर ऊपर चढ़ता है तब सयोजक में तनाव कितना होगा ? यह मान लीजिए कि समतल तथा आनत सड़क पर घर्षण गुणांक एक ही है। (10^4 वाट, 2960N)

2.29 बिजली के मोटर द्वारा किसी लिफ्ट और उसके भार (कुल 1500 कि ग्रा) को 20 मी की ऊँचाई तक उठाना है इस कार्य मे लगा समय 20 सेकंड है। मोटर की दक्षता 75% है कुल कार्य कितना होता है ? किस दर से कार्य होता है ? मोटर द्वारा उपयोग की गई ऊर्जा की दर क्या है ?
(2.94×10^5 J, $1{\cdot}47 \times 10^4$ वाट, $1{\cdot}96 \times 10^4$ वाट)

वृत्तीय गति (Circular Motion)

रेल गाड़ी में यात्रा करते हुए कई बार हमने उसको मोड़ पर वृत्ताकार मार्ग में चलते हुए अनुभव किया होगा। इसी प्रकार सड़क भी कहीं-कहीं वृत्ताकार मार्ग में मुड़ती है। जब भी हम किसी साइकिल या कार से यात्रा कर रहें हों, तो हम भी उसी वृत्ताकार मार्ग से होकर चलते हैं। खिलाड़ियों को भी हमने वृत्ताकार लीकों पर दौड़ते हुए देखा होगा। चन्द्रमा पृथ्वी के चारों ओर लगभग वृत्ताकार कक्ष में घूमता है। इसलिए वृत्तीय गति का अध्ययन करना आवश्यक है। हम केवल उन्हीं वृत्तीय गतियों का अध्ययन करेंगे, जिनमें चाल एकसमान रहती है।

3.1 कोणीय वेग (Angular velocity)

यदि कोई पिण्ड किसी अक्ष के गिर्द घूमे, और किसी काल अवधि t में उसका कोणीय विचलन θ हो, तो उस अक्ष के गिर्द घूमते हुए उसका कोणीय वेग ω **(ओमेगा)** θ/t के बराबर होगा।

नोट: यदि कोणीय वेग चर है तो θ/t उसका औसत मान होगा। यदि यह अचर है तो θ/t कोणीय वेग का मान अचर होगा।

यदि θ रेडियन में है और t सेकण्ड में, तो ω रेडियन प्रति सेकण्ड (rad s^{-1}) होगा।

कल्पना कीजिए, कि कोई कण r अर्धव्यास के वृत में

चित्र 3.1 कोणीय वेग $\omega=\theta/t$

एकसमान चाल से चल रहा है (चित्र 3.1)। इसका कोणीय वेग

$$\omega=\theta/t \qquad (3.1)$$

होगा। इसमें, t काल अवधि में कण द्वारा केन्द्र पर बनाया हुआ कोण θ है। किन्तु, कोण θ का मान

$\frac{\text{चाप AB}}{\text{अर्द्धव्यास r}}$ के बराबर भी है।

अर्थात्,

$$\theta=s/r$$

जिसमें s कण द्वारा t काल अवधि में तय किए गए चाप AB की लम्बाई है।

$$\omega = \frac{s/r}{t} = \frac{s}{rt} = \frac{1}{r}(s/t)$$

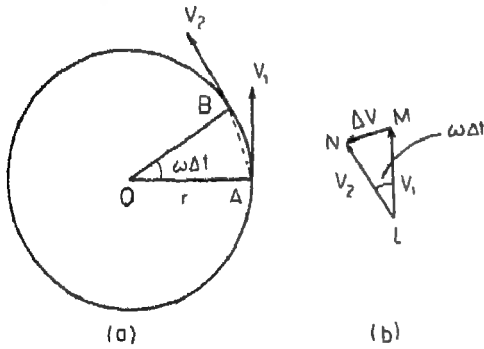
या, $$\omega = \frac{1}{r} v$$

जहाँ v कण की चाल है। अतः

$$v = r\omega \qquad (3.2)$$

कोणीय वेग की विमाएँ $\frac{L/T}{L} = T^{-1}$ होती है।

3.2 एकसमान वृत्तीय गति (Uniform circular motion)

कल्पना कीजिए कि m सहति का कोई कण एक-समान कोणीय वेग ω से r अर्द्धव्यास के किसी वृत में चल रहा है। तब कण की चाल भी एकसमान होगी, और इसका मान rω होगा। माना कि कण की स्थिति किसी काल-बिन्दु पर A है, और किसी छोटी काल-अवधि △t के बाद इसकी स्थिति B हो जाती है।

चित्र 3.2 एकसमान वृतीय गति

माना कि उसका आरम्भिक वेग सदिश $\mathbf{v}_1$ है, और △t काल-अवधि के बाद इसका वेग सदिश $\mathbf{v}_2$ है। दोनों स्थितियों में वेग का परिमाण समान है, और दिशा बदल गई है। यहाँ वेग का परिवर्तन दिशा परिवर्तन के कारण हुआ है।

क्योंकि कण के वेग में परिवर्तन हो रहा है, अतः इसमें त्वरण है। इसका मान वेग में **परिवर्तन** दर को ज्ञातकर निकाल सकते हैं।

चित्र 3.2 (b) में LM और LN क्रमशः दोनों वेग सदिशो $\mathbf{v}_1$ और $\mathbf{v}_2$ को निरुपित करते हैं। अन्तिम वेग $\mathbf{v}_2$ प्रारम्भिक वेग $\mathbf{v}_1$ और वेग-अन्तर $\triangle\mathbf{v}$ का सदिश योग है। MN वेग के अन्तर को निरुपित करता है। त्रिकोण LMN और OAB समरूप त्रिभुज है, क्योंकि ∠BOA=∠NLM और, OA और OB भुजाओं का अनुपात LM और LN भुजाओं के अनुपात के बराबर है। इन दोनों में से प्रत्येक अनुपात का मान 1 है। अतएव,

$$\frac{MN}{AB} = \frac{LM}{OA}$$

जैसे-जैसे $\triangle t \rightarrow 0$, कोण $\omega\triangle t$ भी उसी के अनुसार शून्य की ओर प्रवृत होगा, और भुजा AB चाप AB के सन्निकटतः बराबर हो जायेगी। उपरलिखित समीकरण में AB के स्थान पर $v\triangle t$ लिखने पर,

$$\frac{\triangle v}{v\triangle t} = \frac{v}{r} \text{ या } \frac{\triangle v}{\triangle t} = \frac{v^2}{r}$$

जब △t शून्य की ओर प्रवृत होगा, तो उस दशा में लब्ध त्वरण का मान उसका तात्कालिक मान होगा। अतएव त्वरण $\frac{v^2}{r}$ के बराबर है। क्योंकि इसमें v अचर है, इसलिए औसत त्वरण और तात्क्षणिक त्वरण एक-समान ही है क्योंकि $v=r\omega$ इसलिए, त्वरण का मान $r\omega^2$ भी हुआ अतः

$$\text{त्वरण } |\mathbf{a}| = \frac{v^2}{r} = r\omega^2 \qquad (3.3)$$

त्वरण एक सदिश राशि है इसलिए इसकी दिशा भी निर्धारित होनी चाहिए। यदि कोण $\omega\triangle t$ का मान कम किया जाय, तो भुजा LN भुजा LM के सन्निकट होती जाती है, और उस चरम सीमा में जब $\triangle t \rightarrow 0$ हो, तो $\mathbf{v}_2$ और $\mathbf{v}_1$ एक दूसरे के लगभग समान्तर हो जाते हैं। तब MN अर्थात् $\triangle\mathbf{v}$ वेग-सदिश के लम्बवत् हो जायेगी। अतः स्पष्ट है, कि त्वरण वेग-सदिश के लम्बवत् होता है। क्योंकि वृत के किसी बिन्दु पर वेग की दिशा वृत के उस बिन्दु पर खींची हुई स्पर्श रेखा की दिशा में होती है, इसलिए त्वरण उस बिन्दु से केन्द्र O को मिलाने वाले

अर्धव्यास की दिशा में होगा। यदि पिण्ड को किसी वृत की परिधि पर चलना हो तो यह आवश्यक है कि उसका त्वरण वृत के केन्द्र की ओर लगे। इसे "अभिकेन्द्रीय" (Centripetal) त्वरण कहते है। केन्द्र की ओर लगने वाला बल F अभिकेन्द्रीय (Centripetal) बल कहलाता है, और इसका मान निम्नलिखित समीकरण द्वारा व्यक्त किया जाता है।

$$F = \frac{mv^2}{r} = mr\omega^2 \qquad (3.4)$$

ग्रीक भाषा में सेंट्रीपीटल (Centripetal) का अर्थ "केन्द्र को ढूंढने वाला" होता है।

यदि डोरी के एक सिरे पर बँधी किसी गेंद को (चित्र

उदाहरण 3.1

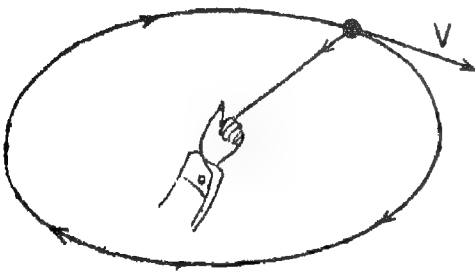
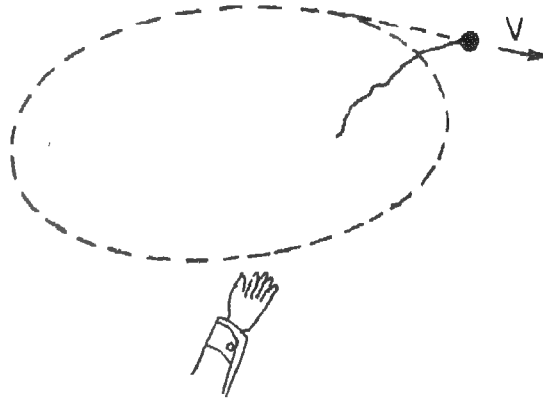
$\frac{1}{4}$ कि ग्रा की संहति के किसी कण को एक मीटर अर्द्धव्यास के वृत्त में एकसमान चाल 4 मी से$^{-1}$ से घुमाया जाता है। आवश्यक अभिकेन्द्रीय बल कितना होगा ?

अभिकेन्द्रीय बल $F = \frac{mv^2}{r}$

इस उदाहरण में, $m = \frac{1}{4}$ कि ग्रा, $r = 1$ मी, $v = 4$ मी से$^{-1}$

$\therefore F = \frac{1}{4} \times \frac{16}{1} = 4$ न्यूटन

(a)

(b)

चित्र 3.3 (a) एक वृत्त में घुमायी जाती हुई गेंद (b) जब रस्सी मुक्त कर दी जाती है तब गेंद स्पर्श रेखीय दिशा में जाती है।

3·3 a) वृत्तीय मार्ग में घुमायें, तो गेंद को वृत्तीय कक्षा में घुमाये रखने के लिए आवश्यक अभिकेन्द्रीय बल हमारा हाथ अपने खिंचाव द्वारा प्रदान करता है। यदि डोरी बीच में से काट दें, तो गेंद वृत्त की परिधि में नहीं घूमेगी, क्योंकि डोरी कटते ही गेंद पर लगने वाला अभिकेन्द्रीय बल लगना बन्द हो जायेगा। किन्तु यह उस समय वृत्त की स्पर्शरेखा की समान्तर दिशा में एक वेग से गतिशील था, ईसलिए डोरी के कटते ही गेंद स्पर्शरेखा की दिशा में चलती जायेगी (चित्र 3·3b)।

उदाहरण 3.2

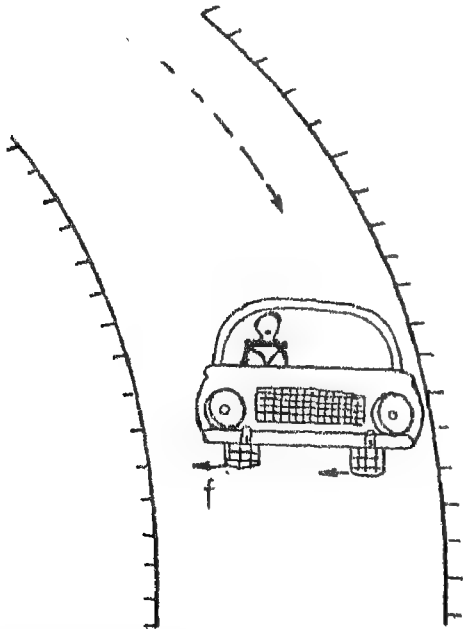
1200 कि ग्रा संहति की किसी कार को 40 मी अर्द्धव्यास के एक वृत्तीय मोड़ से होकर जाना है। यदि इसकी चाल 10 मी से$^{-1}$ हो, तो इस पर लगने वाला अभिकेन्द्रीय बल कितना होगा ?

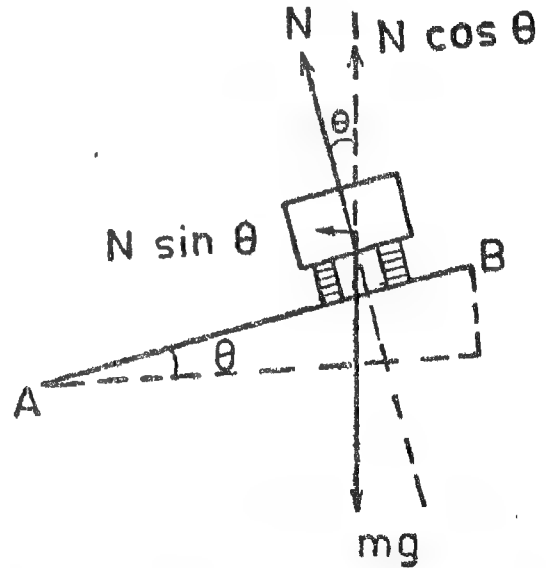
सूत्रानुसार अभिकेन्द्रीय बल $F = \frac{mv^2}{r}$

इस उदाहरण में, $m=1200$ कि ग्रा, $r=40$ मी, $v=10$ मी से$^{-1}$

$$\therefore F=\frac{1200 \times 10 \times 10}{40}=3000 \text{ न्यूटन}$$

3.3 मोड़ का उच्चालन (Banking of curve)

यदि कोई कार समतल सड़क पर चल रही हो, और कोई मोड़ आ जाए, तो मोड़ के वृत्तीय पथ पर चलती हुई कार को जितने अभिकेन्द्रीय बल की आवश्यकता होती है, वह, यदि कोई और उपाय न हो, तो कार के पहिये और सड़क के बीच प्रत्युत्पन्न घर्षण द्वारा प्रदान किया जाता है (चित्र 3.4)। परन्तु यदि ऐसा ही हो, तो टायर जल्दी घिस जायेंगे। व्यवहार में इसलिए प्राय: ऐसा किया जाता है, कि मोड़ों पर सड़क को मोड़ की बाहरी परिधि की तरफ थोड़ा ऊँचा कर देते हैं। इसे "मोड़ का उच्चालन" कहते हैं। ऐसा कर देने से टायरों का घिसना कम हो जाता है, क्योंकि इस दशा में पहिये और सड़क के बीच लम्बवत प्रतिक्रिया के बल का क्षैतिज घटक अभिकेन्द्रीय बल प्रदान करता है।

चित्र 3.4 किसी वक्र पथ में जाती हुई मोटर गाड़ी पहिये और सड़क के बीच के घर्षण बल f से अभिकेन्द्रीय बल मिलता है।

माना कि कोई कार उच्चालित मोड़ पर चल रही है। चित्र 3.5 में इसकी ऊर्ध्व काट का चित्र दिखाया गया है। AB सड़क की चौड़ाई है। इसमें क्षैतिज से θ कोण बनाती हुई एक नति दी गई है, ताकि पहिये और सड़क के बीच में लगने वाली लम्बवत् प्रतिक्रिया N का क्षैतिज घटक मिल जाए। N का यह घटक कार को वृत्तीय लीक पर चलाये रखने के लिए आवश्यक अभिकेन्द्रीय बल प्रदान करता है। इस दशा में पहिये और सड़क के बीच घर्षण को वांछित अभिकेन्द्रीय बल प्रदान करने की कोई आवश्यकता नहीं रहती। दूसरे शब्दों में, पहिये के टायर कम घिसते हैं।

चित्र 3.5 एक ओर उठी हुई वक्र सड़क पर जाती हुई गाड़ी (ऊर्ध्वाधर काट)

पहिये और सड़क के बीच लम्बवत् प्रतिक्रिया के बल N को ऊर्ध्वाधर और क्षैतिज दिशा के घटकों में वियोजित करने पर हमें निम्नलिखित समीकरण प्राप्त होंगे :

क्योंकि ऊर्ध्वाधर दिशा में कोई गति नहीं है, इसलिए,

$$N \cos\theta = mg$$

और अभिकेन्द्रीय बल के लिए

$$N \sin\theta = \frac{mv^2}{r}$$

इसमें v कार की चाल है, r मोड का अर्द्धव्यास है और m कार की संहति है। दोनों समीकरणो का अनुपात लेने से हमें प्राप्त होगा :

$$\tan\theta = \frac{v^2}{rg} \quad (3.5)$$

सड़क की नति के अनुसार, कार की जो उपयुक्त चाल होनी चाहिए, उसे मोड़ प्रारम्भ होने से पहले, सामान्यतः, साइन बोर्ड लगाकर सूचित कर दिया जाता है। रेल की पटरियों में मोड़ आने पर भी इसी प्रकार का उच्चालन कर दिया जाता है। इसमें, मोड़ की बाहर की पटरी को भीतर की पटरी की तुलना में थोड़ा ऊँचा उठा दिया जाता है।

चित्र 3.6 ऊर्ध्वाधिर वृत्त पर आता हुआ मोटर-साइकिल-सवार

उदाहरण 3.3

मोटर साइकिल चलाने के एक खेल में मोटर साइकिल को एक ऊर्ध्वाधिर वृत्त में चला ले जाने के लिए एक गोलाकार कक्ष बनाया गया है। इस कक्ष का अर्द्धव्यास 5 मीटर है। मोटर साइकिल सवार न्यूनतम कितनी चाल से मोटर साइकिल चलाये कि वह बिना गिरे यह करतब दिखा सके ? g का मान 9.8 मी से$^{-2}$ है।

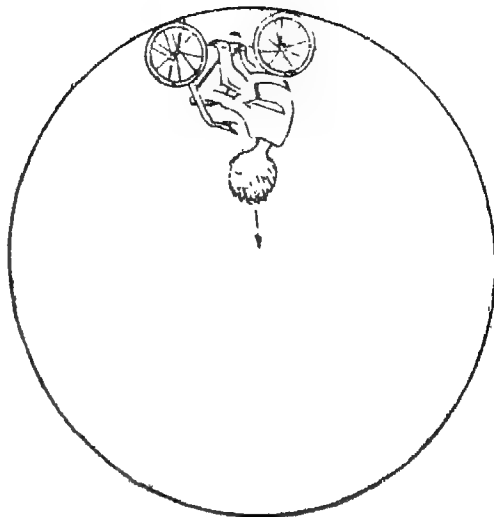
मोटर साइकिल और उसके सवार का भार सीधा नीचे की ओर लगता है। उसका मान mg होगा। यदि उसे ऊर्ध्वाधिर वृत्त में होकर बिना गिरे चलना है, तो यह आवश्यक है कि अभिकेन्द्रीय बल का मान mg से अधिक हो। अर्थात्, $\frac{mv^2}{r} > mg$ न्यूनतम चाल का मान प्राप्त करने के लिए, समीकरण होगा

$\frac{mv^2}{r} = mg$ । अर्थात्, $v^2 = rg$

इस उदाहरण में दिया हुआ है,

$v^2 = 5 \times 9.8$

$\therefore v = \sqrt{49} = 7.0$ मीसे$^{-1}$

चाल का मान किलोमीटर प्रति घण्टे में v = 25.2 कि मी/घण्टा होगा। मोटर साइकिल और उसके सवार की संहति का पद इस समीकरण में निरस्त हो जाता है। सामान्यतः, सुरक्षा को ध्यान में रखते हुए सवार इससे काफी अधिक चाल से साइकिल चलाया करते हैं।

उदाहरण 3.4

एक मोटर साइकिल और उसके सवार की संहति 120 कि ग्रा है। सवार 60 मी के अर्द्धव्यास के एक मोड़ से 15 मी से$^{-1}$ की रफ्तार से गुजरता है। यदि घर्षण-गुणांक का मान 0.5 हो, तो क्या सवार मोड़ से बिना गिरे पार हो जायेगा ? गिरने से बचने के लिए क्या उसे किसी कोण पर झुकना आवश्यक है ? गुरुत्वीय त्वरण का मान 9.8 मी से$^{-2}$ है।

सूत्रानुसार आवश्यक अभिकेन्द्रीय बल $= \frac{mv^2}{r}$

दिये हुए मान रखने पर,

अभिकेन्द्रीय बल $= \frac{120 \times 15 \times 15}{60}$

$= 450$ न्यूटन (N)

मोटर साइकिल और सवार का कुल भार

$= 120 \times 9.8$ न्यूटन (N)

घर्षण का अधिकतम बल $= \mu \times$ (साधारण बल)

$= 0.5 \times 120 \times 9.8$

$= 588$ न्यूटन (N)

क्योंकि, आवश्यक अभिकेन्द्रीय बल घर्षण के अधिकतम सम्भव बल से कम है, इसलिए सवार मोड़ को पार कर जायेगा। यदि उसे ऊर्ध्वाधर से θ कोण बनाते हुए झुकना पड़े, तो

$$\tan \theta = \frac{450}{120 \times 9.8} = 0.383$$

अतएव, $\theta = 21°$

3.4 ग्रह-गति और केपलर के नियम (Planetary motion and Kepler's laws)

प्रस्तावना (Introduction)

प्राचीन काल के खगोलज्ञों में ईसा पूर्व दूसरी शताब्दी के यूनानी खगोलज्ञ टॉलेमी ने ग्रहों की गति का विस्तृत अध्ययन किया और उनकी सापेक्ष स्थिति एवं गति के विषय में सिद्धान्त प्रतिपादित किये। उनके सिद्धान्त का मुख्य विषय यह था, कि पृथ्वी विश्व के केन्द्र में है और सूर्य, चन्द्र, अन्य ग्रह तथा तारे भी इसकी परिक्रमा करते हैं। इसको भूकेन्द्रिक सिद्धान्त कहते है। इसके आधार पर आकाशीय पिण्डों के परिक्रमण के लिए निर्धारित कक्षाएं बड़ी जटिल आती थी, और पूरा सिद्धान्त स्वयं भी बड़ा जटिल था। कोपरनिकस के समय तक यह सिद्धान्त सत्य माना जाता रहा। सोलहवी शताब्दी में कोपरनिकस ने सूर्य केन्द्रिक सिद्धान्त का प्रतिपादन किया, जिसके अनुसार सूर्य को केन्द्र बनाकर सब ग्रह अपनी-अपनी कक्षाओं में उसकी परिक्रमा करते है। बहुत समय तक इन दोनों सिद्धान्तों के मानने वालो में मतभेद रहा। कोपरनिकस से बहुत पूर्व, पाँचवी शताब्दी मे भारत के प्रसिद्ध गणितज्ञ और खगोलज्ञ आर्यभट्ट ने खगोलिकी में बड़ा उल्लेखनीय कार्य किया। अपने अनुसन्धानों के आधार पर उन्होंने यह सिद्धान्त स्थापित किया कि पृथ्वी अपने अक्ष पर घूमती है।[1] शायद पूर्व और पश्चिम के वैज्ञानिकों में उन दिनों विचारो के आदान-प्रदान के लिए सुविधाएँ उपलब्ध नही थी, इसी कारण उनके सिद्धान्त पश्चिम के दार्शनिकों तक नहीं पहुंच पाये। पश्चिमी जगत में एक कठिनाई यह भी रही कि क्रिश्चियन चर्च जो उन दिनों यूरोप की सभी गतिविधियों पर छाया हुआ था, इतना रूढिवादी था कि वह किसी ऐसे सिद्धान्त को मानने के लिए तैयार नही था, जिसमें पृथ्वी को विश्व के केन्द्र का स्थान न दिया गया हो। यहाँ तक कि कोपरनिकस भी, जिसने सूर्य केन्द्रिक सिद्धान्त का प्रतिपादन किया, चर्च के भय के कारण अपने सिद्धान्त को संसार के आगे साहसपूर्वक नहीं रख सका। उसने इसे ग्रहों की गति को समझने के लिए केवल गणितीय सुविधा कह कर बताया।

सोलहवीं शताब्दी (1546-1601) के प्रसिद्ध खगोलज्ञ टाइको ब्राहे ने ग्रहो की गति का वर्षो तक अवलोकन किया। टाइको ब्राहे की मृत्यु से पूर्व तक केपलर (1571-1630) उनका सहायक रहा। केपलर ने टाइको ब्राहे द्वारा इकट्ठे किए गए आँकडो का ध्यानपूर्वक विश्लेषण किया। उन्होंने ग्रहों की गति में कुछ नियमितायें पाई, और इनके आधार पर उन्होने ग्रह-गति के तीन नियम स्थापित किये, जो उनके नाम से प्रचलित है।

3.5 केपलर के नियम (Kepler's laws)

केपलर के ग्रह-गति के नियम ये हैं :

1. प्रत्येक ग्रह सूर्य की दीर्घवृत्तीय कक्षा में परिक्रमा करता है, और सूर्य इस दीर्घवृत्त के एक फोकस पर स्थित होता है (कक्षाओं का नियम)।
2. सूर्य से ग्रह तक खीचा गया अर्द्धव्यास-सदिश समान अवधि में समान क्षेत्र समाहित करता है (क्षेत्रफलों का नियम)।
3. सूर्य की एक परिक्रमा पूरी करने के काल (परिक्रमण-काल) का वर्ग, सूर्य से उस ग्रह की औसत दूरी के घन के समानुपाती होता है (भ्रमण-कालों का नियम)। दूसरे शब्दों में, प्रत्येक ग्रह के लिए T^2/r^3 का मान समान होता है। इसमें T ग्रह का परिक्रमण-काल है, और r उसकी सूर्य से औसत दूरी है।

---

1. सही बात तो यह है कि आर्यभट्ट का विश्व भू-केन्द्रिक था पर भू-स्थिर नहीं।

किसी ग्रह की अपनी कक्षा में चाल एक समान नहीं होती, किन्तु उसमें परिवर्तन इस प्रकार होता है, कि अर्द्धव्यास-सदिश समान काल-अवधि में समान क्षेत्रफल समेटता है। ग्रह का त्वरण और इसीलिए इस पर लगने वाला गुरुत्वजनित बल, सदा सूर्य की दिशा में लगते है।

जैसा हम अभी कह चुके है, केपलर के नियम टाइकोब्राहे द्वारा एकत्र किए हुए आँकड़ों के ध्यानपूर्वक विश्लेषण के परिणामस्वरूप प्राप्त हुए थे। ये नियम अनुभव आश्रित है। इनका कोई सैद्धान्तिक आधार नहीं था।

3.6 न्यूटन का सार्वत्रिक गुरुत्वीय नियम (Newton's universal law of gravitation)

यूनानी दार्शनिक अरस्तु का यह विश्वास था कि आकाशीय पिण्डों की गति जिन नियमों के अन्तर्गत होती है, वे नियम पृथ्वी के पिण्डों की गति के नियमो से भिन्न है। सत्रहवीं शताब्दी तक लोग इस बात को केवल विश्वास के आधार पर ही मानते रहे, कि पिण्डों में नीचे की ओर गिरने की प्रवृत्ति उनके स्वाभाविक गुण के रूप में विद्यमान होती है, और इसलिए यदि किसी पिण्ड को ऊपर से छोड़ दिया जाये, तो वह नीचे गिरेगा। इससे अधिक इनका कोई स्पष्टीकरण उन दिनों नहीं था। न्यूटन ने ही सबसे पहले यह सोचा, कि पिण्डों का पृथ्वी पर गिरना पृथ्वी के आकर्षण-बल के कारण होता है। उन्होने विचार किया, कि गुरुत्वजनित बल जो पेड़ से गिरते हुए सेब को पृथ्वी की ओर आकर्षित करता है, चन्द्रमा को भी पृथ्वी के चारो ओर घुमाने के लिए आवश्यक अभिकेन्द्रीय बल प्रदान करके, घुमाये रखता होगा। उन्होंने चन्द्रमा के परिक्रमण-काल और उसकी पृथ्वी से दूरी के ज्ञान के आधार पर चन्द्रमा का अभिकेन्द्रीय त्वरण निकाला। जो मान उन्होंने प्राप्त किया वह बहुत कम अर्थात् 0.00267 मी से$^{-2}$ था। पृथ्वी पर गुरुत्वीय त्वरण और चन्द्रमा के अभिकेन्द्रीय त्वरण के इन मानों में बड़े अन्तर को समझने के लिए उन्होंने यह माना कि गुरुत्वीय आकर्षण का बल दूरी के वर्ग के व्युत्क्रमानुपाती होता है। एक और अत्यन्त महत्त्वपूर्ण बात जो उन्होने मानी, वह यह थी, कि हम पृथ्वी की संहति को उसके केन्द्र पर सकेन्द्रित हुई मान सकते हैं। यह मान्यता, बाद में उन्हीं की आविष्कृत अवकलन गणित द्वारा सत्यापित भी हो गई।

भूतल पर गिरते हुए सेब की पृथ्वी के केन्द्र से दूरी सन्निकटत: पृथ्वी के अर्द्धव्यास के बराबर, अर्थात् 6.4×10^3 किमी है जबकि चन्द्रमा की पृथ्वी के केन्द्र से दूरी चन्द्र कक्षा के अर्द्धव्यास के बराबर, अर्थात, 3.85×10^5 किमी है। न्यूटन की मान्यता के अनुसार

$$\frac{\text{सेब का त्वरण}}{\text{चन्द्रमा का त्वरण}}=\frac{(\text{चन्द्र कक्षा का अर्द्धव्यास})^2}{(\text{सेब की पृथ्वी के केन्द्र से दूरी})^2}$$

इस व्यंजक की बाँयी ओर की राशि का मान

$$\frac{9.8}{0.00267}=3675$$

जिसमें हमने पृथ्वी पर गुरुत्व त्वरण का मान 9.8 मी से$^{-2}$ माना है। व्यंजक की दाई ओर की राशि का मान

$$=\frac{(3.85\times10^5)^2}{(6.4\times10^3)^2}=3619$$

इन दोनों लब्ध अनुपातों के मान लगभग बराबर है, जो तथ्य न्यूटन की मान्यता के पक्ष में है।

क्योंकि पिण्डों पर लगने वाला बल उनकी संहति पर निर्भर करता है, ($F=ma$), इसलिए उन्होंने यह निष्कर्ष निकाला, कि पृथ्वी द्वारा चन्द्रमा पर लगने वाला बल भी चन्द्रमा की संहति पर निर्भर होगा। इसी प्रकार चन्द्रमा द्वारा पृथ्वी पर लगने वाला बल पृथ्वी की संहति पर निर्भर होगा। इसलिए उन्होंने अन्तिम निष्कर्ष यह निकाला, कि पृथ्वी और चन्द्रमा में परस्पर लगने वाले गुरुत्वीय बल को उनकी दूरी के व्युत्क्रमानुपाती होने के साथ-साथ दोनों की संहतियों पर भी निर्भर करना चाहिए। इसी प्रकार सेब और पृथ्वी में परस्पर आकर्षण बल उनकी दूरी के वर्ग के व्युत्क्रमानुपाती होने के साथ-साथ पृथ्वी और सेब की संहतियों पर भी निर्भर करता है। इन परिणामों को व्यापक बनाते हुए उन्होंने विचार किया कि ब्रह्माण्ड में किन्हीं भी दो पिण्डों के बीच आकर्षण-बल उनकी दूरी के वर्ग के व्युत्क्रमानुपाती और उनकी संहतियों के समानुपाती होता है। वे अपने विचारों की जाँच प्रयोगशाला में दो पिण्डों के बीच आकर्षण माप-

कर नहीं कर पाये क्योंकि पिण्डों के आकर्षण में बल का मान बहुत अधिक नहीं होता और घर्षण आदि अन्य बलों की उपस्थिति, जो आकर्षण बल की तुलना में बहुत अधिक होते हैं, इसको मापने में कठिनाई उत्पन्न करती है।

तथापि ग्रह की गतियों में वे अपने विचारों की सत्यता की जांच इस प्रकार कर सके, कि उनके सिद्धांतों के आधार पर व्युत्पन्न किए गए परिणाम केपलर के नियमों से मेल खाते हैं। उनकी मान्यता के अनुसार प्रत्येक ग्रह पर सूर्य का आकर्षण-बल सूर्य और ग्रह की दूरी के वर्ग के व्युत्क्रमानुपाती और सूर्य एव ग्रह की संहतियों के समानुपाती है, इसलिए न्यूटन ने केपलर के भ्रमण कालों के नियम को अपनी मान्यता के आधार पर व्युत्पन्न किया।[1]

गुरुत्वीय बल के लिए उनके प्रतिपादित वर्ग-व्युत्क्रमानुपाती नियम को सूर्य और ग्रह की गति पर लगायें, तो यह ज्ञात होगा, कि किसी ग्रह की कक्षा दीर्घवृत्ताकार होती है, और सूर्य उनके एक फोकस पर स्थित होता है।

न्यूटन के सार्वत्रिक गुरुत्व के नियम को हम इस प्रकार व्यक्त करते है :

"विश्व में प्रत्येक पिण्ड प्रत्येक दूसरे पिण्ड को आकर्षित करता है। आकर्षण का यह बल उन दोनों पिण्डों की परस्पर दूरी के वर्ग के व्युत्क्रमानुपाती तथा दोनों की संहतियों के समानुपाती होता है।"

गणित की भाषा में इसे हम इस प्रकार व्यक्त कर सकते है।

$$F = G \cdot \frac{m_1 m_2}{R^2}$$

यहाँ m_1 और m_2 दोनों पिण्डों की संहतियाँ, और R उनके बीच की दूरी के लिए प्रयुक्त प्रतीक है। G एक अचर है, और इसे सार्वत्रिक गुरुत्वीय स्थिरांक कहते है।

न्यूटन के गति और गुरुत्वाकर्षण के नियमों के आधार पर केपलर के ग्रह-गति के नियमों का व्युत्पन्न हो जाना इस बात का प्रमाण था कि न्यूटन का गुरुत्वाकर्षण का नियम सही है। न्यूटन के सिद्धान्तों की बड़ी विजय इस बात में थी, कि वे आकाशीय पिण्डों की गति और पृथ्वी के गुरुत्वाकर्षण के कारण गिरने वाले पिण्डों की गति, दोनों पर समान रूप से होते थे। इससे यह विश्वास कि आकाशीय पिण्डों और पार्थिव पिण्डों की गतियों के लिए दो अलग-अलग सिद्धान्त हैं सदैव के लिए समाप्त हो गया। केपलर और न्यूटन के अनुसंधानों के आधार पर कोपरनिकस का सूर्य-केन्द्रिक सिद्धांत भी पक्की तरह से स्थापित हो गया। इस सबके साथ हमें गतियों के वर्णन के लिए अपेक्षित एक ऐसा जड़त्वीय निर्देश-तन्त्र प्राप्त हुआ जो सूर्य से सम्बद्ध है।

---

1. वृत्तीय कक्षा में ग्रह के परिक्रमण काल के लिए व्यंजन है :

$$T = \frac{2\pi r}{v}$$

इसमें T परिक्रमण काल, r कक्षा का अर्धव्यास और v परिक्रमण की चाल है। इसलिए,

$$T^2 = \frac{4\pi^2 r^2}{v^2} \quad \text{और} \quad \frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{rv^2} \qquad (1)$$

यदि ग्रह का सूर्य की ओर त्वरण a हो तो वृत्तीय कक्षा के लिए, $a = v^2/r$ होगा। न्यूटन के इस विचार के अनुसार, कि ग्रह पर लगने वाला आकर्षण बल सूर्य और ग्रह की दूरी के वर्ग के व्युत्क्रमानुपाती होता है, a का मान होगा :

$$a = \frac{K}{r^2}$$

इसमें K एक अचर है a के लिए लब्ध इन दोनों समीकरणों को परस्पर बराबर रखने पर लब्ध होगा

अर्थात $$\frac{v^2}{r} = \frac{K}{r^2}$$

v^2 का मान समीकरण (1) में रखने पर प्राप्त होगा .

$T^2/r^3 = 4\pi^2/K =$ अचर

यदि K का मान ग्रह की संहति पर निर्भर करता हो, तो T^2/r^3 का मान सभी ग्रहों के लिए समान नहीं होगा।

जो परिणाम हमने ऊपर व्युत्पन्न किये हैं, वे दीर्घ-वृत्तीय कक्षाओं के लिए भी सही हैं। उस स्थिति में r दीर्घ-वृत्त का अर्धदीर्घ अक्ष है।

3.7 सार्वत्रिक गुरुत्वीय स्थिरांक (Universal gravitational constant)

गुरुत्वीय स्थिरांक G का मान पिण्डों के स्वभाव अथवा माध्यम के गुणों पर निर्भर नहीं करता। इसीलिए इस नियम की सार्वत्रिकता प्रसिद्ध है।

G की विमायें $L^3M^{-1}T^{-2}$ होती है।

यदि हम m_1 और m_2 संहतियों के दो पिण्डों, जिनके बीच की दूरी r हो, में लगने वाले गुरुत्वीय बल F को माप सकें, तो गुरुत्वीय अचर G का मान गणना करके निकाला जा सकता है। प्रयोगशाला में उपलब्ध किन्हीं भी दो पिण्डों के बीच लगने वाले गुरुत्वीय बल का मान इतना अल्प होता है, कि इतने अल्प परिमाण के बलों को मापने की विधि न्यूटन के पश्चात् भी काफी समय तक ज्ञात नहीं थी। 1978 ई० में हेनरी केवैन्डिश G का मान प्रयोगशाला में निकालने में सफल हुए। उसके बाद के अन्वेशकों ने और भी अच्छी विधियों का विकास करके G का मान निकाला। G का अब स्वीकृत मान 6.67×10^{-11} न्यूटन मी² किग्रा⁻² है।

उदाहरण 3.4

यह दिया हुआ है कि G का मान 6.67×10^{-11} न्यूटन मी² (कि ग्रा)⁻² है, पृथ्वी का अर्द्धव्यास (R) 6.38×10^6 मी है, और गुरुत्वीय त्वरण (g) 9.8 मी से⁻² है। इन आँकड़ों के आधार पर पृथ्वी की संहति की गणना कीजिए।

हम जानते हैं कि भूतल पर m संहति के किसी पिण्ड पर लगने वाला गुरुत्वजनित आकर्षण का बल निम्नलिखित समीकरण द्वारा व्यक्त किया जा सकता है।

$$Mg = G \cdot \frac{Mm}{R^2}$$

इसमें M पृथ्वी की संहति है।

अर्थात $$M = \frac{gR^2}{G}$$

$$= \frac{9.8 \times (6.38 \times 10^6)^2}{6.67 \times 10^{-11}} = 5.98 \times 10^{24} \text{ किग्रा}$$

3.8 गुरुत्वीय क्षेत्र (Gravitational field)

किसी चुम्बक के आस-पास चुम्बकीय क्षेत्र पाया जाता है। इसी प्रकार विद्युत आवेश के चारों ओर विद्युत क्षेत्र रहता है। इस क्षेत्र में यदि कोई आवेश लाया जाए तो इस पर बल लगेगा। इसी प्रकार पृथ्वी के चारों ओर एक गुरुत्वीय क्षेत्र विद्यमान रहता है, और यदि इस क्षेत्र में किसी संहति का कोई पिण्ड लाया जाय तो उस पर गुरुत्वीय बल लगने लगता है, जिसकी दिशा पृथ्वी के केन्द्र की ओर होती है। चुम्बकीय और विद्युत क्षेत्रों के समान ही हम गुरुत्वीय क्षेत्र की तीव्रता की परिभाषा बना सकते है।

पृथ्वी के केन्द्र से x दूरी पर स्थिति ($x > R$, पृथ्वी का अर्द्धव्यास है) m संहति के किसी पिण्ड पर पृथ्वी की ओर लगने वाले गुरुत्वजनित बल [illegible] निम्नलिखित समीकरण द्वारा व्यक्त करेंगे :

$$F = G\frac{Mm}{x^2} \quad (3.7)$$

इसमें M पृथ्वी की संहति है। यदि $m = 1$ हो, तो बल का मान होगा $\frac{GM}{x^2}$। पृथ्वी के केन्द्र से x दूरी पर रखे हुए इकाई संहति के पिण्ड पर लगने वाला बल उस स्थान पर पृथ्वी के कारण उत्पन्न गुरुत्वीय क्षेत्र की तीव्रता कहलाता है। क्षेत्र में किसी भी बिन्दु पर इकाई संहति पर लगने वाला बल उस स्थान पर उस क्षेत्र की तीव्रता का मान निरूपित करता है।

यदि किसी बिन्दु पर गुरुत्वीय बल की तीव्रता k हो, तो उस बिन्दु पर m संहति पर लगने वाले बल F का मान होगा

$$F = km \quad (3.8)$$

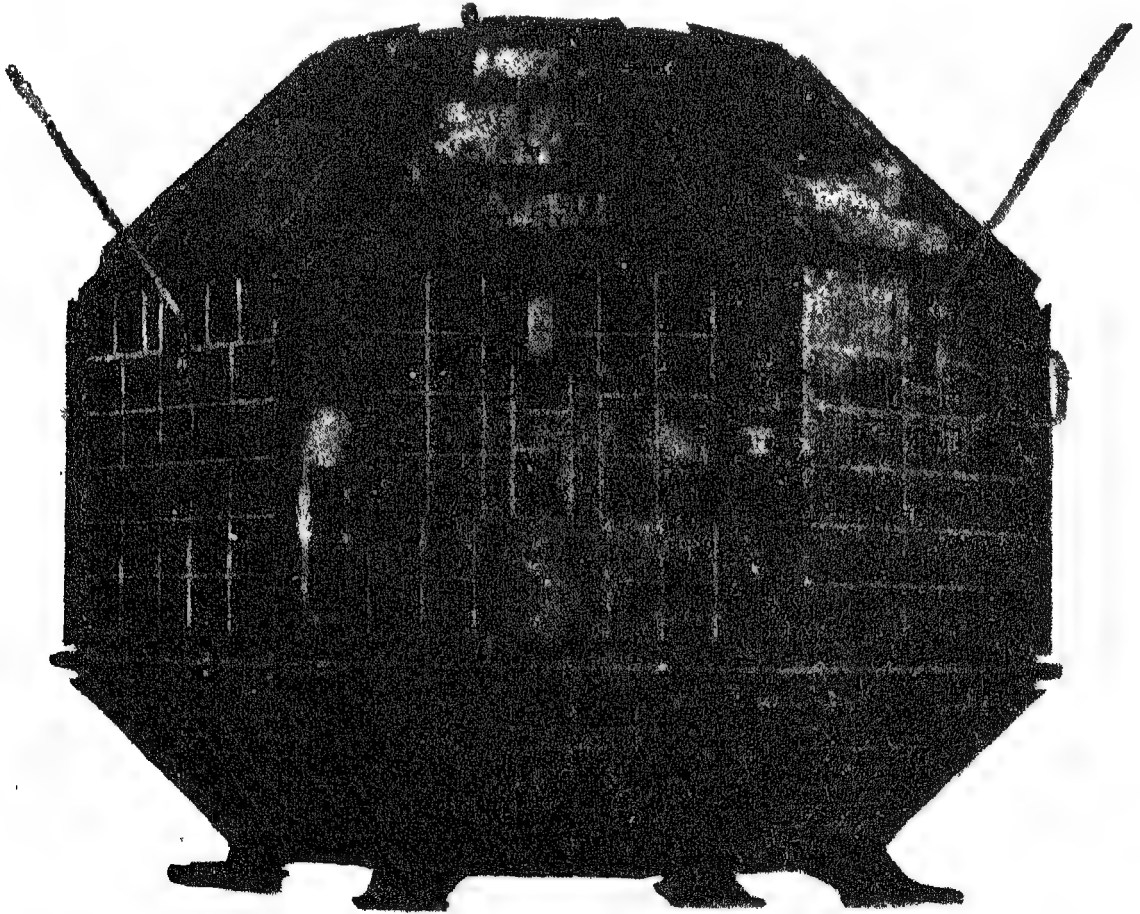
यह उल्लेखनीय है कि भूतल के निकट गुरुत्वीय क्षेत्र की तीव्रता g है।

3.9 गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा (Gravitational potential energy)

स्थितिज ऊर्जा की उत्पत्ति पिण्डों की एक दूसरे के सापेक्ष स्थिति और उनकी अन्योन्य क्रिया के कारण होती है। यदि पिण्डों की सापेक्ष दूरी में परिवर्तन किया जाये, तो इस प्रकारउत्पन्न विचलन के कारण गुरुत्वीय बल की दिशा में, अथवा उसकी विपरीत दिशा में, कार्य किया जायेगा। दोनों ही दशाओं में निकाय की गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा में परिवर्तन हो जाएगा।

गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा (जिसकी प्रतीक के रूप में ϕ लिखते हैं) उस दशा में शून्य होगी जब उन दोनों पिण्डों की सापेक्ष दूरी अनन्त हो। भूतल पर पृथ्वी के केन्द्र से x दूरी पर स्थित m संहति के किसी पिण्ड पर लगने वाले गुरुत्वजनित बल F का मान समीकरण (3.7) के अनुसार दिया जायेगा। (x पृथ्वी के अर्धव्यास R से अधिक है)।

संहति को पृथ्वी की ओर किसी अत्यल्प दूरी $\triangle x$ का विचलन देने पर जो कार्य किया जायेगा वह Fdx होगा। यदि संहति को अनन्तता से भूतल पर लेकर आयें, तो कुल सम्पन्न कार्य Fdx को ∞ से R की सीमा में समाकलित करने पर प्राप्त होगा।

$$=\int_{\infty}^{R}\frac{GMm}{x^2}dx=\left[-\frac{GMm}{x}\right]_{\infty}^{R}=-\frac{GMm}{R}$$

चित्र 3.7 पृथ्वी का उपग्रह आर्यभट्ट

यहाँ ऋणात्मक चिन्ह गुरुत्वीय बल के आकर्षण के कारण किए हुए कार्य को निरुपित करने के लिए है। क्योंकि अन्योन्य ऊर्जा व्यय हुई है, इसलिए यह उपरलिखित परिमाण में कम हो गई है। मूलतः जब पिण्ड अनन्तता पर स्थित था तो उसकी स्थितिज ऊर्जा (पृथ्वी के कारण) शून्य थी। इसलिए, m संहति के किसी पिण्ड की, भूतल के निकट, गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा

$$\phi = -\frac{GMm}{R} \qquad (3.9)$$

होगी।

3.10 भू-उपग्रह (Earth's satellite)

चन्द्रमा पृथ्वी का प्रकृति-दत्त उपग्रह है। इसकी कक्षा लगभग वृत्ताकार है, जिसका औसत अर्धव्यास 3.85×10^5 कि मी है और यह पृथ्वी की एक परिक्रमा 27·3 दिन में पूरी कर लेता है। सर्वप्रथम 1956 ई० में मानव ने प्रथम कृत्रिम उपग्रह छोड़ा। उसके बाद तो भूतल से कुछ सौ किलोमीटर की ऊँचाई पर पृथ्वी की परिक्रमा करते हुए अनेक कृत्रिम उपग्रह छोड़े जा चुके हैं। इनके द्वारा पृथ्वी के ऊपरी वायुमण्डल के बहुत से पहलुओं का अध्ययन किया जा रहा है।

भारत ने भी 19 अप्रैल 1975 ई० को एक कृत्रिम भू-उपग्रह "आर्यभट्ट" छोड़ा (चित्र 3·7)। इसका नाम पाँचवीं शताब्दी के प्रसिद्ध भारतीय खगोलज्ञ "आर्यभट्ट" के नाम पर रखा गया है। भारत ने 7 जून 1979 ई० को अपना दूसरा उपग्रह "भास्कर" अंतरिक्ष में छोड़ा। भविष्य में भी उपग्रह छोड़ने के लिए भारत में कार्य किया जा रहा है।

3.11 पलायन वेग (Escape velocity)

धीमी गति से फेंके गए सभी प्रक्षेप्य भूमि पर वापिस गिर पड़ते हैं। भू-उपग्रह बनाने के लिए छोड़े गये रॉकेट का वेग कम से कम इतना होना चाहिए कि वह पृथ्वी के गुरुत्वीय आकर्षण के बाहर जा सके। पृथ्वी के गुरुत्वीय आकर्षण से पूरी तरह बाहर निकल जाने के लिए रॉकेट को जितने वेग से छोड़ना आवश्यक होता है उसका मान 'पलायन वेग' कहलाता है।

माना कि पृथ्वी की संहति M है, और रॉकेट की m। रॉकेट छोड़ने के बाद जब इसका समस्त ईंधन जल चुके तब तक यह जितनी ऊँचाई तक पहुंचता है वह पृथ्वी के अर्धव्यास R की तुलना में बहुत अधिक नहीं होती। इसलिए हम यह मान सकते हैं कि रॉकेट की पृथ्वी के केन्द्र से दूरी सन्निकटतः R है। इस दशा में माना कि रॉकेट का वेग v_R है। तब इस स्थिति में

समीकरण (3·9) के अनुसार निकाय की गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा $= -\frac{GMm}{R}$

और गतिज ऊर्जा $= \frac{1}{2}mv_R^2$

माना कि अन्तिम अवस्था में रॉकेट की दूरी अनन्त हो जाती है, जहाँ उसकी गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा शून्य है। वहाँ उसकी गतिज ऊर्जा $\frac{1}{2}mv^2$ होगी, जिसमें v रॉकेट का अनन्तता पर वेग है। ऊर्जा संरक्षण के सिद्धान्त के अनुसार

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_R^2 - \frac{GMm}{R}$$

इस समीकरण में बाईं ओर का पद, जो रॉकेट की अन्तिम गतिज ऊर्जा का पद है रॉकेट के पृथ्वी के आकर्षण-बल से पलायन करने के लिए धनात्मक होना चाहिए। अर्थात्,

$\frac{1}{2}mv_R^2$ अधिक होना चाहिए $\frac{GMm}{R}$ से

अर्थात्, v_R अधिक होना चाहिए $\sqrt{\frac{2GM}{R}}$ से

अब हम जानते हैं कि

$G = 6.67 \times 10^{11}$ न्यूटन मी²/(कि ग्रा)²

$M = 5.98 \times 10^{24}$ कि ग्रा

और $R = 6.4 \times 10^6$ मी

इसलिए, v_R अधिक होगा

$$\sqrt{\frac{2 \times 6.67 \times 10^{-11} \times 5.98 \times 10^{24}}{6.4 \times 10^6}} \text{ से}$$

अर्थात्, v_R अधिक होगा 11,160 मी से$^{-1}$ या

11.6 कि मी से$^{-1}$ से

या, v_R अधिक होगा 40000

या, 4×10^4 किमी/घंटा से

जैसा कि हमने पाया, रॉकेट को पृथ्वी के गुरुत्वाकर्षण बल से पलायन के लिए 4×10^4 किमी/घंटा से

अधिक वेग से छोड़ा जाना चाहिए।

नोट : जब रॉकेट ऊपर जाता है, तो उसकी स्थितिज ऊर्जा $-\frac{GMm}{R}$ से बढ़ कर, अनन्तता पर पहुँचने पर, शून्य हो जाती है। ऊर्जा में यह वृद्धि रॉकेट को दी गई गतिज ऊर्जा के रूपान्तर से प्राप्त होती है।

3.12 कक्षीय वेग (Orbital velocity)

कृत्रिम उपग्रहों की कक्षा भू-धरातल से कुछ सौ मीटर की ऊंचाई पर होती है। इस ऊँचाई पर वायु अत्यन्त विरल होती है। उपग्रह को रॉकेट से ऊपर ले जाकर क्षैतिज दिशा में बहुत तीव्र वेग से ऐसे छोड़ते है कि यह लगभग वृत्तीय कक्षा में घूमता रहे। क्योंकि वहाँ पर वायु का प्रतिरोध नगण्य होता है, इसलिए इसे अपनी कक्षा में घूमते रहने के लिए कोई कार्य नही करना पड़ता, और इसलिए इसे ईंधन की आवश्यकता नहीं होती।

अब हम इस प्रश्न पर विचार करेंगे : क्या उपग्रह को अपनी कक्षा में घूमते रहने के लिए किसी निर्धारित वेग की आवश्यकता होती है। हम देख ही चुके है, कि जब कोई कण किसी वृत्त की परिधि में एक समान चाल से भ्रमण करे, तो कण के ऊपर उस वृत्तीय मार्ग के केन्द्र की ओर लगने वाला एक त्वरण कार्य करता है। परिमाणतः एक अभिकेन्द्रीय बल भी लगता है। जब तक यह अभि-केन्द्रीय बल लगता रहेगा, कण अपने वृत्ताकार मार्ग में चलता रहेगा।

माना कि कृत्रिम उपग्रह की संहति m है और इसकी कक्षा हम भूतल से h ऊंचाई पर रखना चाहते है। उपग्रह पर पृथ्वी के केन्द्र की ओर लगने वाले गुरुत्वीय बल F का मान समीकरण (3·7) के अनुसार होगा।

$$\therefore \quad F = G \frac{Mm}{(R+h)^2}$$

इसमें M पृथ्वी की संहति है, R पृथ्वी का अर्धव्यास है और G सार्वत्रिक गुरुत्वीय स्थिरांक है। यदि इसके फलस्वरूप उपग्रह पर पृथ्वी के केन्द्र की ओर लगने वाला त्वरण a_s हो तो,

$$a_s = \frac{F}{m} = \frac{(GM)}{(R+h)^2}$$

यदि R+h के अर्धव्यास की वृत्तीय कक्षा में भ्रमण करने के लिए उपग्रह का वेग v हो, तो उस के लिए आवश्यक अभिकेन्द्रीय त्वरण a का मान निम्नलिखित समीकरण द्वारा प्राप्त होगा,

$$a = \frac{v^2}{(R+h)}$$

परन्तु यह त्वरण a गुरुत्वीय बल प्रदान करेगा। इसलिए

$$a = a_s$$

अर्थात्

$$\frac{v^2}{(R+h)} = \frac{GM}{(R+h)^2}$$

या,

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R+h}}$$

उदाहरण 3.5

माना कि एक उपग्रह ऐसा छोड़ा जाता है कि उसकी कक्षा भू-तल से 330 किलोमीटर ऊँची बने। इसको कक्षा में किस चाल से छोड़ा जाए? इसके परिक्रमण-काल की भी गणना कीजिए। दिया हुआ है, कि

पृथ्वी का अर्द्धव्यास, **R=6370** कि मी

पृथ्वी की संहति, $M = 5{\cdot}98 \times 10^{24}$ कि ग्रा

$G = 6{\cdot}67 \times 10^{-11}$ न्यूटन मी² प्रति (किग्रा)²

क्योंकि h=330 कि मी, इसलिए

$$(R+h) = 6\,700 \text{ कि मी}$$
$$= 6{\cdot}7 \times 10^6 \text{ मी}$$

उपरलिखित सूत्र को लगाने पर

$$v = \sqrt{\frac{6{\cdot}67 \times 10^{-11} \times 5{\cdot}98 \times 10^{24}}{6{\cdot}7 \times 10^6}}$$
$$= 7.716 \times 10^3 \text{ मी से}^{-1}$$
$$= 2.8 \times 10^4 \text{ कि मी/घंटा}$$

एक परिक्रमा में उपग्रह जितनी दूरी तय करता है (अर्थात् कक्षा की परिधि), उसका ज्ञान होने पर हम उपग्रह के परिक्रमण-काल को निम्नलिखित प्रकार से निकाल सकते है।

कक्षा की परिधि $=2\pi\ (R+h)$

$=2\pi\ (6.7\times10^3)$ मी

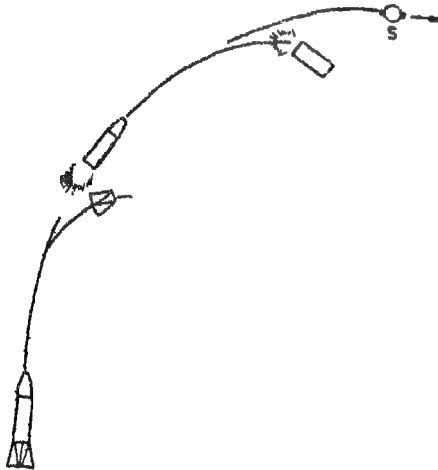
वेग $=7.716\times10^3$ मी से$^{-1}$

इसलिए, उपग्रह का परिक्रमण काल

$$=\frac{2\pi\times6{\cdot}7\times10^6}{7.716\times10^3\times60}\ \text{मिनट}$$

$=91$ मिनट

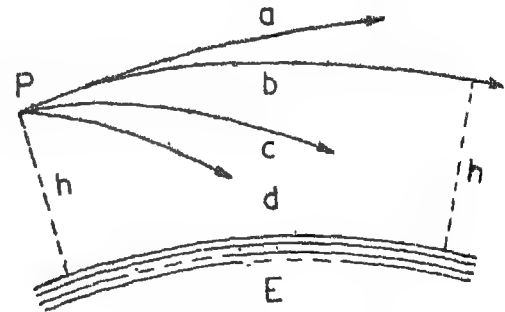
3.13 उपग्रह-निर्वाण (Satellite launching)

कृत्रिम भू-उपग्रह बहु-पद रॉकेट होते हैं (चित्र 3.8)। प्रारम्भ में रॉकेट को किसी निश्चित ऊँचाई तक पहुँचाने के लिए पर्याप्त वेग दिया जाता है। उस अपेक्षित ऊँचाई तक पहुँचाने के बाद (अन्तिम पद) उपग्रह को क्षैतिज दिशा में इतना वेग (कक्षीय वेग) देकर छोड़ा जाता है कि यह अपनी कक्षा में पृथ्वी की परिक्रमा करता रहे

चित्र 3.8 बहुचरणी राकेट (S=उपग्रह)

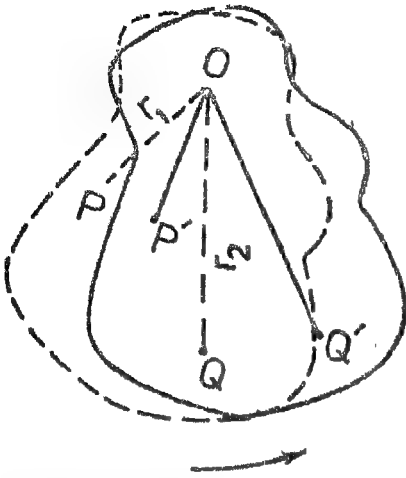
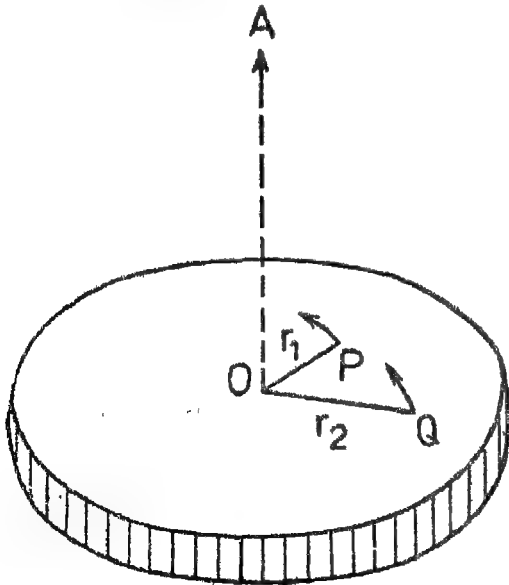
(चित्र 3.8)। यदि उपग्रह को इससे अधिक वेग से छोड़ दिया जायेगा, तो या तो यह बाहर की ओर जाकर बड़ी कक्षा बनाएगा, अथवा यह सर्वदा के लिए पलायन भी कर सकता है। यदि इससे कम वेग से छोड़ा जायेगा, तो यह भूमि पर वापस गिर पड़ेगा (चित्र 3.9)। यदि इसे वृत्तीय कक्ष के लिए निर्धारित वेग से छोड़ें, परन्तु इसकी दिशा क्षैतिज न रक्खें तो इसका मार्ग दीर्घ वृत्ताकार बनेगा।

3.14 दृढ़ पिण्डों का घूर्णन (Rotation of rigid bodies)

दृढ़ पिण्ड आदर्शतः इस प्रकार के पिण्डों को कहते हैं जिनके अवयव कण गति में भी अपनी सापेक्ष स्थिति बनाये रखते है। इसके अर्थ यह हुए, कि पिण्ड को विकृत नहीं किया जा सकता; यदि समस्त पिण्ड में विस्थापन हो, तो उसके प्रत्येक अवयव कणों का भी उतना ही विस्थापन होगा। यदि कोई पिण्ड किसी अक्ष के सापेक्ष किसी निश्चित कोण से घुमाया जाए तो पिण्ड का प्रत्येक अवयव कण भी इस अक्ष के सापेक्ष उतने ही कोण से घूमेगा। चित्र 3.10 में चित्र के समतल के लम्बवत् O से होकर जाने वाले अक्ष के गिर्द दृढ़-पिण्ड का घूर्णन दिखाया गया है। दृढ़-पिण्ड के किसी कण P का घूर्णन कोण POP′ पिण्ड के किसी दूसरे कण Q के घूर्णन कोण QOQ′ के बराबर है। यह उल्लेखनीय है, कि अक्ष पर स्थित सभी बिन्दु स्थिर हैं।

नित्यप्रति के जीवन में घूर्णन के अनेक उदाहरण हमारे सामने आते हैं। पहिए, घिरनी, बिजली के पंखे के फलक, कब्जों पर घूमते किवाड़ और ग्रामोफोन के रिकार्ड

चित्र 3.9 उपग्रह का प्रवर्तन। यदि उपग्रह को क्षैतिज दिशा में पर्याप्त वेग से फेंका जाय तो वृत्ताकार कक्षा में चलने लगता है। E=पृथ्वी a=1.5 कि मी/से, b=7.75 कि मी/से c=4 कि मी से, d=3 कि मी, h=400 कि मी

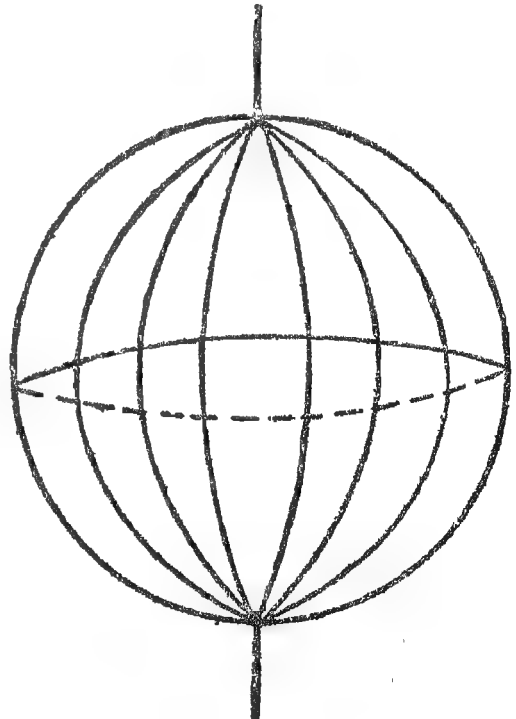
घूर्णमान दृढ़-पिण्डों के कुछ उदाहरण हैं। चलती हुई कार के पहिये अपने अक्ष के गिर्द घूर्णन करने के साथ-साथ आगे भी चलते है, अर्थात् इनमें घूर्णन के साथ-साथ स्थाना-

चित्र 3.10 किसी पिण्ड के भीतर O से गुजरने वाले अक्ष के चारों ओर घूमता हुआ वही दृढ़-पिण्ड।

न्तर गति भी होती है। स्पिन करती हुई (भ्रमित) टैनिस की गेंद घूर्णन—और स्थानान्तरण—गतियों के एक साथ होने का एक और उदाहरण है। पृथ्वी में भी घूर्णन—और स्थानान्तरण गतियां एक साथ होती है।

चित्र 3.11 OA अक्ष पर घुमता हुआ दृढ़-पिण्ड P बिन्दु का कोणीय वेग वही है जो Q बिन्दु का है पर Q बिन्दु का रैखिक वेग P की अपेक्षा अधिक है।

घूमते हुए लट्टू का घूर्णाक्ष यदि ऊर्ध्व दिशा से कुछ झुका हुआ हो, तो समय के साथ-साथ उसके अक्ष की स्थिति में भी परिवर्तन हो जाता है। हम इस अध्याय में स्थिर अक्ष के गिर्द घूर्णमान दृढ़-पिण्डों का ही अध्ययन करेंगे।

यह हम पहले ही देख चुके हैं कि किसी घूर्णमान दृढ़-पिण्ड के प्रत्येक कण के लिए कोणीय वेग ω समान होता है। चित्र 3.11 में OA अक्ष के गिर्द घूर्णमान एक दृढ़-पिण्ड दिखाया गया है। क्योंकि $v = r\omega$ होता है, इसलिए घूर्णाक्ष से कण की स्थिति जितनी अधिक दूर होगी उसका रैखिक वेग भी उतना ही अधिक होगा। चित्र में P और Q दो कण दिखाए गए हैं जिसकी O से दूरियाँ क्रमशः r_1 और r_2 है। r_1, r_2 से छोटा है। इसलिए P का रैखिक वेग अर्थात् $r_1 \omega$, Q के रैखिक वेग $r_2 \omega$ से कम होगा। उनके रैखिक वेगों का अनुपात r_1 और r_2 के अनुपात के बराबर है।

उदाहरण 3.6

अपने अक्ष के गिर्द घूर्णमान पृथ्वी का कोणीय वेग

चित्र 3.12 पृथ्वी का अपने अक्ष के चारो ओर घूमना

कितना है ? पृथ्वी का विषुवत् रेखीय अर्द्धव्यास 6,378 कि मी मानकर विषुवत् रेखा पर स्थित किसी पिण्ड का रैखिक वेग ज्ञात कीजिए ।

पृथ्वी अपने अक्ष के गिर्द एक चक्कर 24 घटे में पूरा करती है । क्योंकि 24 घंटे में पृथ्वी 2π रेडियन का कोण घूम जाती है, इसलिए इसका कोणीय वेग ω

$$=\frac{2\pi}{24\times60\times60} \text{ रेडियन/सेकण्ड}$$

विषुवत रेखा पर स्थित पिण्ड का रैखिक वेग=
(पृथ्वी का विषुवत रेखीय अर्द्धव्यास) × (घूर्णन का कोणीय वेग)

$$=\frac{6378\times2\pi}{24\times60\times60}$$

=0.4635 कि मी/सेकंड

=1669 कि मी घंटा$^{-1}$

3.15 कोणीय त्वरण (Angular acceleration)

माना कि अक्ष के गिर्द घूर्णमान किसी कण का t काल में कोणीय विस्थापन θ होता है । यदि इसका कोणीय वेग चर हो, तो इसके कोणीय वेग का तात्क्षणिक मान होगा

$$\omega=\frac{d\theta}{dt}=\dot{\theta} \qquad (3.10)$$

किसी काल बिन्दु पर कोणीय त्वरण का मान होगा

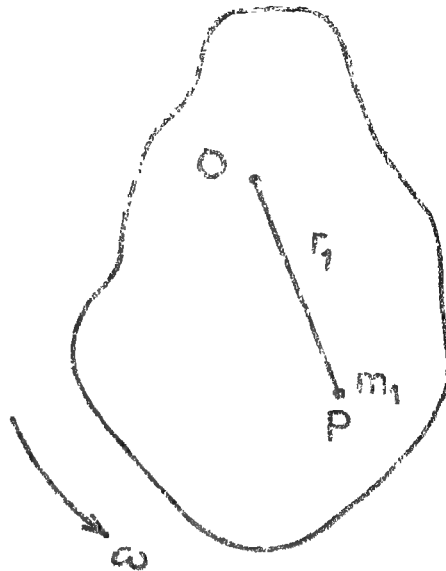
$$\dot{\omega}=\frac{d\omega}{dt}=\frac{d^2\theta}{dt^2}=\ddot{\theta} \qquad (3.11)$$

क्योंकि, कण का कोणीय वेग, ω, चर है, इसलिए इसका रैखिक वेग $r\omega$ भी चर होगा । इसका रैखिक त्वरण a होगा

$$a=r\dot{\omega} \qquad (3.12)$$

यदि कोणीय वेग एक समान हो, तो क्योंकि, $\dot{\omega}=0$ इसलिए कण का रैखिक त्वरण भी शून्य होगा ।

3.16 घूर्णन गतिज ऊर्जा (Rotational Kinetic energy)

चित्र 3.13 में चित्र के समतल के समान्तर O से

चित्र 3.13 घूर्णन गतिज ऊर्जा

होकर जाने वाले अक्ष के गिर्द कोणीय वेग ω से घूर्णन करता हुआ एक दृढ़-पिण्ड दिखाया गया है । अक्ष से r_1 की दूरी पर स्थित m_1 संहति का एक कण P है । इस कण की गतिज ऊर्जा होगी

$$=\frac{1}{2}m_1v_1^2=\frac{1}{2}m_1r_1^2\omega^2$$

दृढ़-पिण्ड इस प्रकार के बहुत से कणों से मिलकर बना हुआ है । इसलिए,

पिण्ड की गतिज ऊर्जा=पिण्ड के अवयव कणों की गतिज ऊर्जाओं का योग

क्योंकि, प्रत्येक कण का कोणीय वेग एक समान है, इसलिए पिण्ड की गतिज ऊर्जा

$$=\frac{1}{2}m_1r_1^2\omega^2+\frac{1}{2}m_2r_2^2\omega^2+\frac{1}{2}m_3r_3^2\omega^2+\ldots$$

$$=\frac{1}{2}(m_1r_1^2+m_2r_2^2+m_3r_3^2+\ldots)\omega^2$$

$$\frac{1}{2}\left(\sum_i m_ir_i^2\right)\omega^2$$

राशि $\sum m_ir_i^2$ को अक्ष O के गिर्द पिण्ड का जड़त्व आघूर्ण कहते हैं । इसका मान न केवल पिण्ड के अवयव कणों की संहतियों पर, अपितु उनकी अक्ष से दूरियों पर निर्भर करता है । जड़त्व-आघूर्ण को प्रतीक I द्वारा निरू-

पित करते है । अर्थात्,

$$I = \sum_i m_i r_i^2 \qquad (3.13)$$

इसका मान पिण्ड की गति की किसी भी अवस्था के लिए एक समान रहता है । किसी पिण्ड का किसी अक्ष के गिर्द जड़त्व-आघूर्ण अचर है । एक ही पिण्ड का जड़त्व-आघूर्ण (M.I.) भिन्न-भिन्न अक्षों के गिर्द घूर्णन के लिए, भिन्न-भिन्न होता है । इसकी विमायें ML^2 है । जड़त्व आघूर्ण का मात्रक MKS पद्धति में कि ग्रा मी और CGS पद्धति में ग्रा से मी² होता है । घूर्णन और स्थानांतरण गतियों के लिए लब्ध गतिज ऊर्जाओं के व्यंजकों की तुलना करने पर हम पायेंगे, कि स्थानान्तरण गति में संहति का जो स्थान है वही स्थान घूर्णन गति में जड़त्व आघूर्ण का है ।

3.17 किसी एकसार वलय का इसके समतल के लम्बवत तथा केन्द्र O से होकर जानेवाले अक्ष के गिर्द जड़त्व आघूर्ण (Moment of inertia of a uniform ring around the axis perpendicular to its plane at centre O)

माना कि r अर्द्धव्यास के किसी पतले एकसार वलय के एक छोटे घटक की संहति m_1 है (चित्र 3.14) । पूरे वलय को हम बहुत से ऐसे छोटे घटकों से बना हुआ मान सकते है । प्रत्येक घटक की O से होकर जाने वाले अक्ष से दूरी समान है । इसलिए, समग्र वलय का जड़त्व-आघूर्ण होगा,

$$\begin{aligned} I &= m_1r^2 + m_2r^2 + m_3r^2 + \ldots \\ &= r^2(\sum_i m_i) = Mr^2 \end{aligned} \qquad (3.14)$$

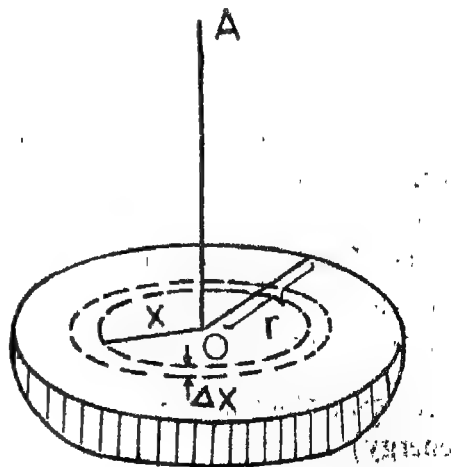
इसमें M वलय की संहति है ।

3.18 एकसार वृत्ताकार डिस्क का इसके समतल के लम्बवत तथा केन्द्र से जाते हुए अक्ष के गिर्द जड़त्व-आघूर्ण (Moment of inertia of a uniform circular disc around the axis perpendicular to its plane at the centre)

माना कि एकसार वृत्ताकार डिस्क के इकाई क्षेत्रफल की संहति m है । इस डिस्क में x अर्द्धव्यास और अत्यल्प चौड़ाई $\triangle x$ के एक समकेन्द्रिक वलय की कल्पना कीजिए । इस वलय की संहति $= (2\pi x \triangle x)m$ होगी वलय के केन्द्र O से इसके समतल के लम्बवत अक्ष के गिर्द जड़त्व-आघूर्ण

$$= (2\pi x \triangle x) m x^2$$

पूरी डिस्क को इस प्रकार के बहुत से समकेन्द्रिक वलयों से बना हुआ मान सकते हैं, और इन वलयों के

चित्र 3.14 किसी एक समान वलय का जड़त्व-आघूर्ण

चित्र 3.15 किसी एक समान वृत्ताकार डिस्क का जड़त्व

अर्द्धव्यास शून्य से लेकर r तक के बीच के सभी मानों के होंगे। पूरी डिस्क का जड़त्व-आघूर्ण I उपरलिखित व्यंजक को 0 से r तक की सीमाओं के बीच समाकलन करके प्राप्त कर सकते हैं।

$$I = \int_0^r (2\pi x dx)\, m x^2$$

$$= 2\pi m \int_0^r x^3 dx$$

$$= 2\pi m \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^r$$

$$= \frac{2\pi m r^4}{4} = \frac{1}{2}(\pi r^2 m) r^2$$

परन्तु, $\pi r^2 m$ डिस्क की कुल संहति M है।
इसलिए,

$$I = \frac{1}{2} M r^2 \qquad (3.15)$$

उदाहरण 3.7

0.5 कि ग्रा संहति की एकसार वृत्ताकार डिस्क का अर्द्धव्यास 10 से मी है। इसके समतल के लम्बवत केन्द्र से जाने वाले अक्ष के गिर्द इसके जड़त्व-आघूर्ण का मान निकालिए।

डिस्क का जड़त्व-आघूर्ण $= \frac{1}{2} m r^2$

$$= \frac{1}{2} \times 0.5 \times \left(\frac{10}{100} \right)^2$$

$= 2 \times 10^4$ कि ग्रा मी²

नोट : अपने अक्ष के गिर्द घूर्णमान किसी बेलन के जड़त्व-आघर्ण का मान, एकसार गोल वृत्ताकार के समान $\frac{1}{2}Mr^2$, होता है। बेलन को अधिक मोटाई का एकसार वृत्ताकार डिस्क मान सकते है।

कुछ सरल आकृतियों के जड़त्व-आघूर्ण (Moment of inertia of some simple figures)

कुछ सरल **आकृतियों** के जड़त्व-आघूर्णो के सूत्र निम्नलिखित हैं :

1. M संहति और 1 लम्बाई की एकसार छड़ का अपनी लम्बाई के लम्बवत् केन्द्र से जाते हुए अक्ष के गिर्द जड़त्व-आघूर्ण $= Ml^2/12$
2. संहति M और लम्बाई 1 की एकसार छड़ का अपनी लम्बाई के लम्बवत् एक सिरे से जाते हुए अक्ष के गिर्द जड़त्व-आघूर्ण $= Ml^2/3$
3. संहति M और अर्द्धव्यास r के गोले का अपने किसी व्यासीय अक्ष के गिर्द जड़त्व-आघूर्ण $= 2/5 Mr^2$

3.19 कोणीय संवेग (Angular momentum)

कल्पना कीजिए कि m संहति का कोई पिण्ड डोरी के एक सिरे से बांधकर r_1 अर्द्धव्यास के वृत्त में एकसमान चाल v_1 से घुमाया जा रहा है, तभी वृत्त का अर्द्धव्यास, डोरी को पिण्ड से कम दूरी r_2 पर पकड़ कर एक साथ ही कम कर r_2 कर दिया गया है।

ऐसा करने से पिण्ड की चाल एकाएक बढ़ जायेगी, और चाल की वृद्धि वृत्त-पथ के अर्द्धव्यास की कमी के अनुसार होगी। अर्थात्,

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{r_1}{r_2} \text{ या } v_2 r_2 = v_1 r_1$$

दोनों ओर के पदों को m से गुणा करने पर

$$m v_2 r_2 = m v_1 r_1$$

mvr को पिण्ड का कोणीय संवेग कहते है और इसे L प्रतीक से निरुपित करते हैं।

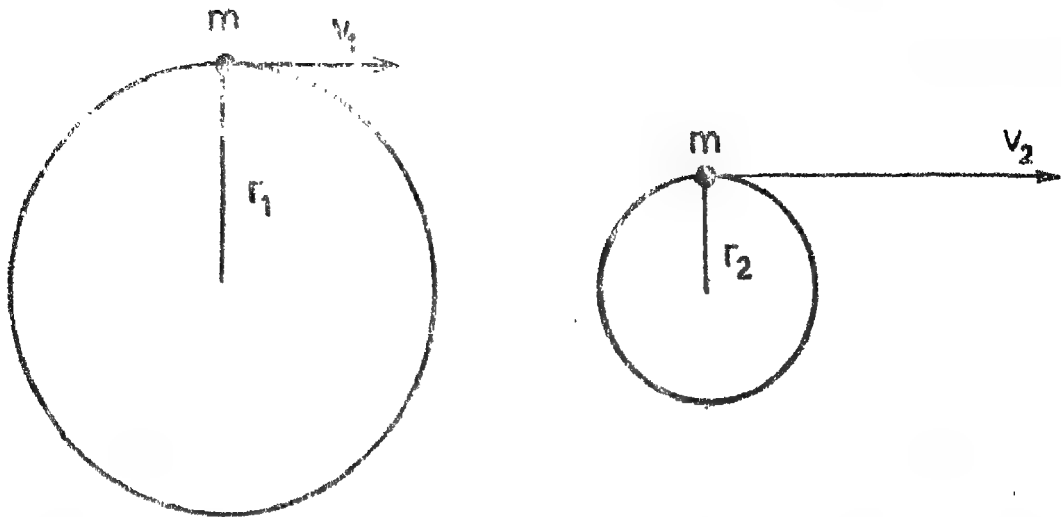
$$v = r\vec{\omega}$$

$$L = m r \vec{\omega} r$$

$$L = m r^2 \vec{\omega}$$

$$L = I\vec{\omega} \qquad (3.16)$$

कोणीय गति में कोणीय संवेग L का वही स्थान है, जो रैखिक गति में रैखिक संवेग का होता है। रैखिक संवेग के समान यह भी एक सदिश राशि है। जैसा ऊपरलिखित व्यंजक से स्पष्ट है, L की विमायें ML^2T^{-1} होती हैं।

पिण्ड की वृत्तीय गति का जो उदाहरण हमने ऊपर

चित्र 3.16 एक वृत्त में घुमाया गया पिण्ड । जब पिण्ड के अर्धव्यास को अकस्मात कम कर दिया जाता है तब पिण्ड की चाल बढ़ जाती है जिससे कोणीय संवेग अपरिवर्तित रहे ।

लिया है उसमें वृत्तीय पथ के अर्द्धव्यास को एक साथ ही कम कर देने से उसकी चाल भी इस हिसाब से बढ़ गई, कि r कम किए जाने पर भी उसके कोणीय संवेग L=mVr का मान अपरिवर्तित रहा । अतः कोणीय संवेग संरक्षित रहता है ।

चित्र 3.17 (a) में एक व्यक्ति किसी घूमते हुए चाक पर दोनों हाथों में कुछ वजन लेकर और उन्हें फैलाकर खड़ा हुआ है । अब यदि वह अपनी बाहों को समेट ले (चित्र 3.17b) तो उसकी चाल बढ़ जायेगी । इसका कारण है कि बाहों के समेट लेने से उसका जड़त्व-आघूर्ण भागों की केन्द्र से दूरी (r) कम हो जाने के कारण कम हो गया ।

इसके अर्थ यह हुए, कि I के मान में कमी होने से $\vec{\omega}$ के मान में तदनुसार वृद्धि हो गई है । इससे यह निष्कर्ष निकलता है, कि अन्तरण इस हिसाब से होता है कि कोणीय संवेग $I\vec{\omega}$ अचर बना रहे । यह बात ध्यान रखने की है, कि यहाँ निकाय पर कोई ऐसा बाहरी बल अथवा बल-युग्म नहीं लगा है, जो पिण्ड की गति को प्रभावित कर रहा हो । किसी पिण्ड पर लगे बल का वह आघूर्ण जो पिण्ड को किसी अक्ष के गिर्द घुमाने में प्रवृत्त करे, बल-आघूर्ण कहलाता है । इसलिए हम कह सकते हैं, कि बाह्य बल-आघूर्ण के अभाव में, किसी निकाय का कोणीय संवेग संरक्षित रहता है । कोणीय संवेग संरक्षण के सिद्धान्त को इस प्रकार व्यक्त करते हैं :

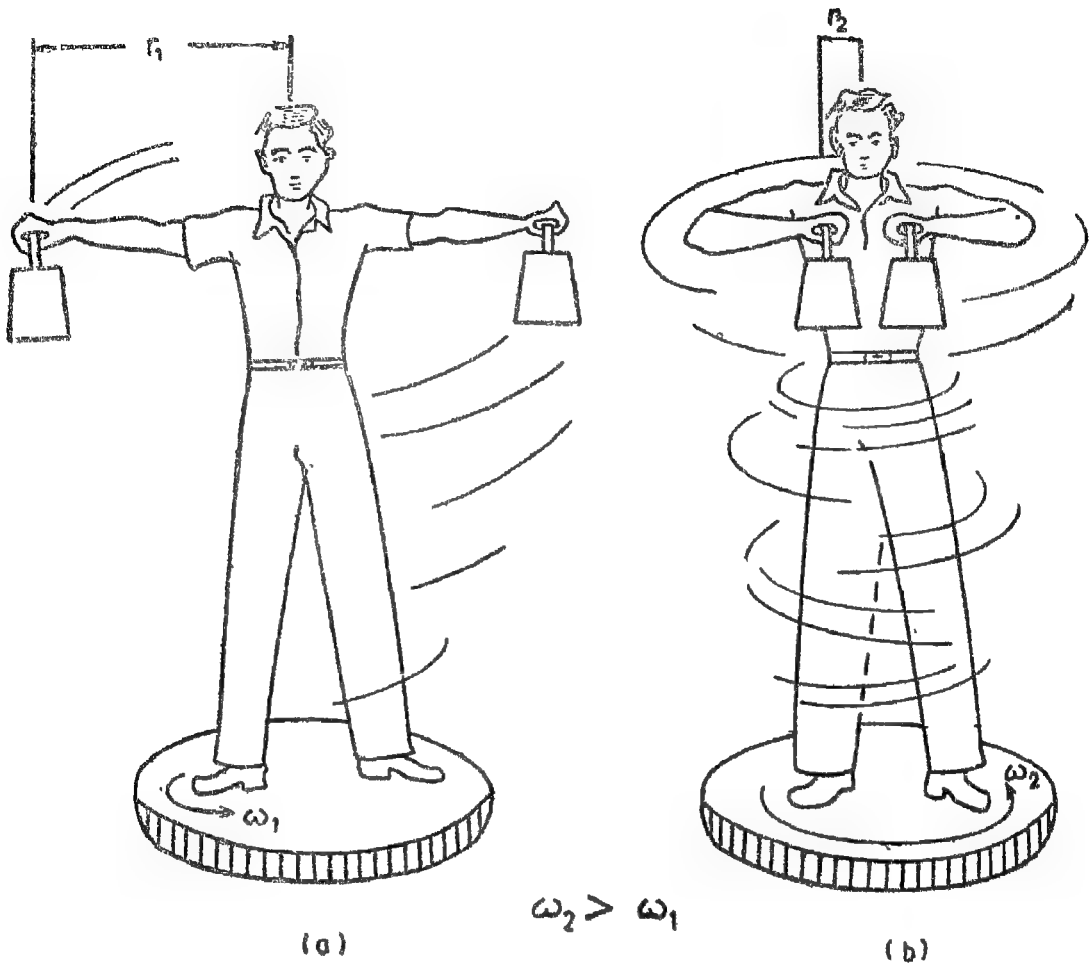
'कणों के किसी निकाय पर यदि बाह्य परिणामी बल-आघूर्ण शून्य हो, तो निकाय का कुल कोणीय संवेग, अर्थात् सभी कणों के कोणीय संवेगों का सदिश योग, अचर रहता है ।'

यह उल्लेखनीय है, कि यह सिद्धान्त रैखिक गति में रैखिक संवेग संरक्षण के सदृश है ।

3.20 बल-आघूर्ण (Moment of force)

माना कि m संहति का कोई कण r अर्द्धव्यास के किसी वृत्तीय पथ में चलने के लिए बाध्य है (चित्र 3.18) । इस पथ में इसकी स्पर्श रेखा की दिशा में कण पर लगने वाला बल F इस पर एक त्वरण a उत्पन्न करेगा जिसका मान होगा,

$$a=F/m$$

यदि कण का कोणीय त्वरण $\vec{\alpha}$ हो तो

चित्र 3.17 कोणीय संवेग का संरक्षण (b) में (a) की अपेक्षा जड़त्व-आघूर्ण कम है। अतः (b) में कोणीय वेग बढ़ जाता है ताकि कोणीय संवेग अपरिवर्तित रहे।

$$a = r\dot{\vec{\omega}}$$

$$\therefore \quad F = ma = mr\dot{\vec{\omega}}$$

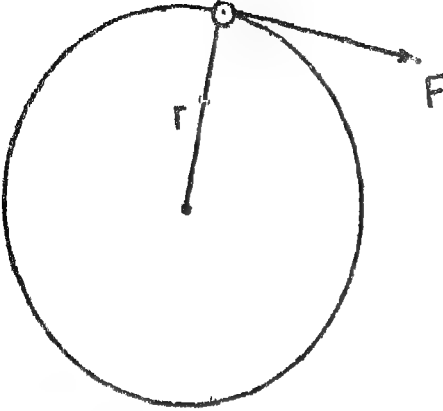
F.r घूर्णाक्ष के गिर्द कण के बल-आघूर्ण $\vec{\tau}$ (ग्रीक अक्षर टाओ) के मान के बराबर है।

$$\therefore \quad \vec{\tau} = Fr = mr^2\dot{\vec{\omega}}$$

इस व्यंजक में mr^2 के स्थान पर घूर्णाक्ष के गिर्द कण का जड़त्व-आघूर्ण I लिख सकते हैं। अतः

$$\vec{\tau} = I\dot{\vec{\omega}} \qquad (3.17)$$

यह सूत्र किसी भी घूर्णमान पिण्ड पर समान रूप से लागू होगा, यदि बल-आघूर्ण और जड़त्व-आघूर्ण दोनों एक ही अक्ष के गिर्द हों।

रैखिक संवेग में हम यह देख चुके हैं कि यदि किसी पिण्ड पर बल लगे, तो उसके रैखिक संवेग P में परिवर्तन की दर लगे हुए बल के समानुपाती होती है। इसी प्रकार कोणीय वेग में यदि किसी घूर्णमान पिण्ड पर बल-आघूर्ण

चित्र 3.18 वृत्तीय कक्षा में घूमते हुए कण पर बल-आघूर्ण

लगे, तो कोणीय संवेग L में परिवर्तन की दर लगे हुए बल-आघूर्ण के समानुपाती होती है। अर्थात्,

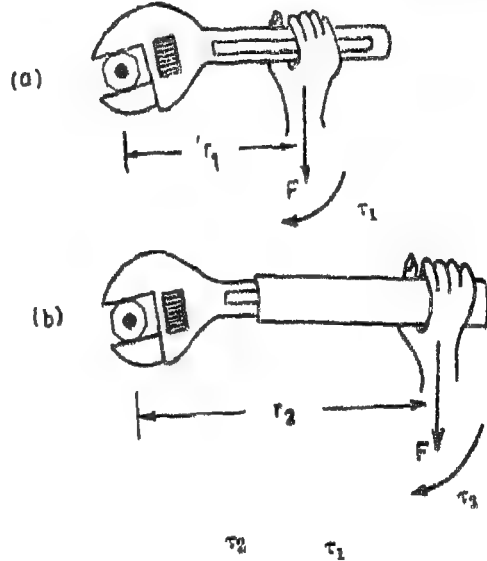
$$\text{बल-आघूर्ण } \vec{\tau} = \frac{dL}{dt} = \frac{d(I\vec{\omega})}{dt} = \frac{Id\vec{\omega}}{dt}$$

$$= I\dot{\vec{\omega}}$$

रैखिक गति में जो स्थान बल का है कोणीय गति में वही स्थान बल-आघूर्ण का है और बल-आघूर्ण एक सदिश राशि है।

बल-आघूर्ण τ की विमायें=
(जड़त्व-आघूर्ण की विमायें)
× (कोणीय त्वरण की विमायें)
$=ML^2T^2$

किसी पिण्ड के कोणीय वेग में परिवर्तन लाने के लिए उस पर बल-आघूर्ण लगाना आवश्यक है। यदि टैनिस की गेंद या फुटबाल में स्पिन (Spin भ्रम) उत्पन्न कर दी जाए, तो इसे किसी अभिलक्षित दिशा में मारना बहुत कठिन हो जाता है, क्योंकि भ्रमित गेंद की घूर्णाक्ष की दिशा को बदलने के लिए उपयुक्त बल-आघूर्ण भी देना पड़ेगा।

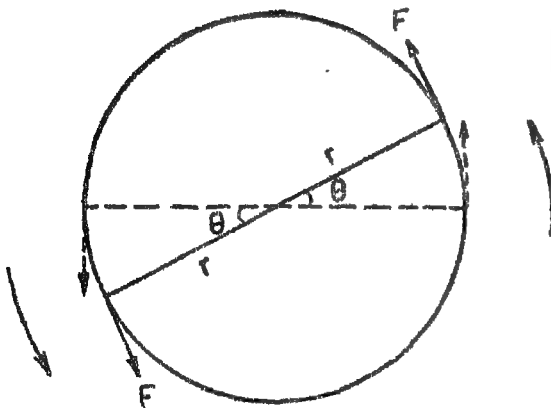
चित्र 3.19 (a) में किसी नट को घुमाने के लिये रिंच का प्रयोग दिखाया गया है। यदि रिंच को चित्र 3.19 (a) में दिखाए प्रकार से नट के निकट पकड़ें तो बल-आघूर्ण अर्थात् घूर्णन प्रभाव, कम होगा। यदि रिंच को दूसरे सिरे पर पकड़े, तो उसी बल के लिए बल-आघूर्ण और इसलिए घूर्णन-प्रभाव भी अधिक होगा। इसलिए,यह सिद्ध हुआ कि घूर्णन-प्रभाव लीवर-भुजा की लंबाई पर निर्भर करता है। लीवर-भुजा की लम्बाई, प्रयुक्त बल की घूर्णाक्ष से लम्बवत् दूरी को कहते है। कभी-कभी

चित्र 3.19 किसी नट को घुमाने के लिए रिंच का उपयोग। बल के एक समान होते हुए (b) में बल-आघूर्ण τ_2(a) में बल-आघूर्ण τ_1 की अपेक्षा अधिक है।

लगाये बल की दूरी को और अधिक बढ़ाने, अर्थात् बल-आघूर्ण का मान अधिक करने, के लिए रिंच में पाइप भी लगा दी जाती है, जैसा चित्र 3.19 (b) में दिखाया गया है।

बल-आघूर्ण $\vec{\tau_2} = F \times r_2$ इसमें F लगाया हुआ बल है और r_2 घूर्णन केन्द्र से बल-रेखा की लम्बवत् दूरी है (चित्र 3.19 b)।

3.21 बल आघूर्ण द्वारा कार्य (Work done of moment of a force)

माना कि किसी डिस्क की परिधि पर, किसी व्यास

के दोनों सिरों पर स्पर्श रेखा की दिशा में दो परस्पर बराबर किन्तु विपरीत दिशाओं में बल F और F लगाये गए हैं। माना कि डिस्क अपने समतल के लम्बवत् और केन्द्र O से होकर जाने वाले अक्ष के गिर्द घूमने के लिए स्वाधीन है। यदि बल-आघूर्ण डिस्क को किसी अत्यल्प कोण θ से घुमाये, तो दोनों बलों का विस्थापन $S=r\theta$ होगा क्योंकि θ अत्यल्प है, इसलिए विस्थापन लगभग बलों F, F की दिशाओं में होंगे। इसलिए, एक बल द्वारा किया हुआ कार्य $Fs=Fr\theta$ होगा। दोनों बल, जो एक युग्म बनाते हैं, उनके द्वारा किया हुआ कार्य $=2Fr\theta$ होगा। किन्तु 2Fr या F (2r) बल-युग्म का घूर्ण, अर्थात् बल-आघूर्ण τ है। इसलिए,

चित्र 3.20 बल-आघूर्ण द्वारा किया गया कार्य

$$\text{बल आघूर्ण द्वारा कार्य}=\tau\theta \qquad (3.18)$$

नोट : θ का मान अधिक होने पर भी यह सूत्र सही है।

3.22 बल-आघूर्ण r और F सदिशों के सदिश गुणनफल के रूप में (Torque as a cross product of r and F)

बल **F** और लीवर भुजा **r** दोनों सदिश हैं। बिन्दु O के गिर्द बल **F** का सदिश-आघूर्ण बल आघूर्ण τ है। इसे हम दो सदिशों के सदिश गुणनफल के रूप में व्यक्त कर सकते हैं। अर्थात्,

$$\vec{\tau}=\mathbf{r}\times\mathbf{F}$$

बल-आघूर्ण का परिमाण **r.F** के बराबर है, और इसकी दिशा **r** और **F** को धारण करने वाले समतल के लंबवत् है। सदिश गुणनफल से प्राप्त राशि की दिशा दाहिने हाथ के पेंच नियम द्वारा निर्धारित की जाती है, जैसा कि उप परिच्छेद 2.7 और चित्र 2.14 में समझाया गया है। चित्र 2.11(a) में **F** बल को और PO, लीवर भुजा **r** को निरुपित करते हैं।

उदाहरण 3.8

मोटर का एक गतिमान पहिया विश्राम स्थिति से आरम्भ करके 5 से कण्ड में 60 रेडियन प्रति सेकण्ड का कोणीय वेग प्राप्त कर लेता है। इसका कोणीय त्वरण कितना है, और आरम्भिक स्थिति से इसका कोणीय विस्थापन कितना हुआ ?

कोणीय वेग का आरम्भिक मान ω_0 5 सेकण्ड के बाद

ω का मान $=60$ रेडियन/से रैखिक गति की तरह घूर्णन गति का समीकरण भी निम्नलिखित है :

कोणीय वेग का अन्तिम मान $=$ कोणीय वेग का आरम्भिक मान $+$ कोणीय त्वरण $\times$ काल

अर्थात्,

$$\omega=\omega_0+\dot{\omega}t$$

इस समीकरण में ω_0, ω और t का मान रखने पर लब्ध होगा,

$$60=\dot{\omega}\times 5$$

$$\dot{\omega}=12 \text{ रेडियन/से}^2$$

उसी सादृश्य के अनुसार, यदि आरम्भ से 5 सेकण्ड पश्चात् घूर्णन कोण θ हो तो,

$$\theta=\omega_0 t+\tfrac{1}{2}\dot{\omega}t^2$$

$$\therefore \theta=\tfrac{1}{2}\times 12\times(5^2)=150 \text{ रेडियन}$$

उदाहरण 3.9

1 किलोग्राम संहति और 0.1 मीटर अर्द्धव्यास की एकसार वृत्तीय डिस्क की परिधि पर, इसके व्यास के

दोनों सिरों पर, स्पर्श रेखाओं की दिशा में दो समान परन्तु विपरीत बल लगाकर एक बल आघूर्ण लगाया जा रहा है। डिस्क अपने समतल के समान्तर और केन्द्र से होकर जाने वाले अक्ष के गिर्द घूमने के लिए स्वाधीन है। दोनों बलों में से प्रत्येक का मान कितना हो कि डिस्क पर 20 रेडियन प्रति सेकण्ड का कोणीय त्वरण उत्पन्न हो? डिस्क को 4 सेकण्ड में कितनी गतिज ऊर्जा प्राप्त होगी?

बल आघूर्ण $\tau = I\dot{\omega}$

इस उदाहरण में डिस्क के लिए $I = \frac{Mr^2}{2}$

इसलिए बल-आघूर्ण $= \frac{Mr^2\dot{\omega}}{2} = \frac{1 \times (0.1)^2 \times 20}{2}$

किन्तु बल आघूर्ण τ का मान $F \times 2r$ के बराबर भी होता है, जिस में F प्रत्येक बल का परिमाण है,

$$\therefore F \times 2 \times 0.1 = \frac{(0.1)^2 \times 20}{2}$$

$\therefore$ F=0.5 न्यूटन (N)

4 सेकण्ड की समाप्ति पर कोणीय वेग $\omega = 20 \times 4 = 80$ रेडियन/से। इसलिए, दी हुई गतिज ऊर्जा $= \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2} \times \frac{1 \times (0.1)^2}{2} \times 80^2$

$= 16$ जूल (J)

उदाहरण 3.10

एक चाक की संहति 16 कि ग्रा और उसका व्यास 0.5 मीटर है। इसके ऊपर एक समान बल-आघूर्ण किस परिमाण का लगाया जाये कि यह 8 सेकण्ड में 120 चक्र प्रति मिनट (rpm) का कोणीय वेग प्राप्त कर ले? 8 सेकंड की समाप्ति पर बल-आघूर्ण द्वारा कार्य की दर क्या होगी? 8 सेकण्ड की समाप्ति पर कोणीय वेग

$$\omega = \frac{120}{60} \times 2\pi$$

$= 4\pi$ रेडियन/से

क्योंकि, आरम्भिक कोणीय वेग शून्य है, इसलिए,

$$\therefore \omega = \dot{\omega}t$$

$\therefore 4\pi = \dot{\omega} \times 8$ या $\dot{\omega} = \frac{\pi}{2}$ रेडियन/से^{2}

$$\tau = I\dot{\omega} = \frac{Mr^2\dot{\omega}}{2} = \frac{16}{2} \times \frac{(0.5)^2}{4} \times \frac{\pi}{2}$$

$= \frac{\pi}{4}$ न्यूटन मी

कार्य करने की दर = (बल-आघूर्ण) × (कोणीय वेग)

$= \frac{\pi}{4} \times 4\pi$

$= \pi^2$ वाट

3.23 रैखिक वेग और घूर्णन वेग में सादृश्य (Relation between linear velocity and rotational velocity)

घूर्णन गति का अध्ययन करते समय हमने पद-पद पर इसका रैखिक गति से सादृश्य पाया है। तालिका 3.1 में रैखिक और घूर्णन रैखिक गतियों में प्रयुक्त होने वाली राशियों के बीच के सादृश्य को तालिकाबद्ध करके दिखाया गया है।

तालिका 3.1

रैखिक गति		घूर्णन गति	
विस्थापन	s	कोणीय विस्थापन	θ
वेग	$\vec{v}$	कोणीय वेग	$\vec{\omega}$
त्वरण	a	कोणीय त्वरण	$\dot{\omega}$
संहति	m	जड़त्व आघूर्ण ($I = \frac{1}{2}mr^2$)	I
बल ($F = ma$)	F	बल आघूर्ण ($\vec{\tau} = I\vec{\omega}$)	$\vec{\tau}$
गतिज ऊर्जा	$\frac{1}{2}mv^2$	गतिज ऊर्जा	$\frac{1}{2}I\omega^2$
कार्य	Fs	कार्य	$\vec{\tau}\theta$
संवेग	$P = mv$	कोणीय संवेग	$\vec{L} = I\omega$

प्रश्न-अभ्यास

3.1 किसी वक्र पथ पर चलने वाला साइकिल सवार एक ओर को झुक क्यों जाता है ? उसे किस ओर झुकना चाहिए ?

3.2 एक मोटर गाड़ी अकस्मात् बाईं ओर घूमती है । अगली सीट पर बैठा यात्री दरवाजे की ओर खिसकने लगता है । यात्री और गाड़ी पर इस समय पर लगे बलों को बताते हुए इसकी व्याख्या कीजिए ।

3.3 न्यूटन के सार्वत्रिक गुरुत्वाकर्षण नियम के अनुसार इस विश्व में प्रत्येक पिण्ड अन्य दूसरे पिण्डों को आकर्षित करता है । परन्तु इस आकर्षक बल के कारण हम यह नहीं देखते कि पृथ्वी के पृष्ठ पर एक वस्तु दूसरे की ओर चल रही है । क्यों ?

3.4 किसी अन्तरिक्ष यान की कल्पना कीजिए जो पृथ्वी से चन्द्रमा की ओर जा रहा हो । पृथ्वी से चन्द्रमा तक जाते समय इसके भार में क्या परिवर्तन होगा ? क्या इसके द्रव्यमान में भी परिवर्तन होगा ?

3.5 गुरुत्वीय क्षेत्र तीव्रता क्या है ? इसके मात्रक क्या होते है ?

3.6 वे प्रतिबन्ध क्या हैं जिनके अनुसार पृथ्वी से छोड़ा गया राकेट वृत्ताकार कक्षा में पृथ्वी का उपग्रह बन सकता है ।

3.7 यदि पृथ्वी के किसी उपग्रह को कक्षा में ऐसी ऊँचाई पर रखा जाता है जहाँ वायुमंडल का प्रतिरोध नगण्य नहीं है तो उपग्रह की गति के ऊपर क्या प्रभाव पड़ेगा ?

3.8 ध्रुव समीप के बर्फ के गलने को पृथ्वी के अपने अक्ष के चारों ओर घूमने में परिवर्तन का एक संभव कारण बताया जाता है । व्याख्या कीजिए ।

3.9 एक पिंड जिसका भार 0.4 कि ग्रा है ऊर्ध्वाधर वृत्त में 2 चक्कर प्रति सेकंड की चाल से घुमाया जाता है । यदि वृत्त का अर्धव्यास 1.2 मी हो तो रस्सी में तनाव ज्ञात कीजिए जब पिंड

(a) वृत्त के शीर्ष बिन्दु पर है,
(b) वृत्त के अधोबिन्दु पर है ।

(71.86 न्यूटन, 79.70 न्यूटन)

3.10 एक रस्सी 25 न्यूटन तक के तनाव को सहन कर सकती है । 0.5 कि ग्रा द्रव्यमान के पिंड को किस अधिकतम चाल से घुमाया जा सकता है जब कि रस्सी की 0.5 की लम्बाई का उपयोग किया जा रहा है ?

(5 मी से$^{-1}$)

3.11 500 किमी घंटा$^{-1}$ की चाल से चलता वायुयान घूमते समय 30° कोण नीचे की ओर झुक जाता है । वक्र का अर्धव्यास कितना है ? (3.41 $\times 10^3$ मी)

3.12 किसी रेलगाड़ी को 400 मी अर्धव्यास के वक्र पर चलना है । भीतरी पटरी की अपेक्षा बाहरी पटरी को कितना उठा होना चाहिए कि रेलगाड़ी 48 कि मी घंटा$^{-1}$ की चाल से जा सके ? पटरियों के बीच दूरी 1 मीटर है । (0.0454 मी)

3.13 सूर्य के आकर्षण के द्वारा पृथ्वी में उत्पन्न त्वरण की तुलना चन्द्रमा द्वारा उत्पन्न त्वरण से कीजिए ।

(1790 : 1)

3.14 चन्द्रमा का अर्द्धव्यास 1.7×10^6 मी है और इसका द्रव्यमान 7.35×10^{22} किग्रा है । इसके पृष्ठ पर गुरुत्वाकर्षण के कारण त्वरण कितना है ? (1.70 मी से$^{-2}$)

3.15 बृहस्पति ग्रह का द्रव्यमान 1.4×10^{27} किग्रा और सूर्य का द्रव्यमान 1.99×10^{30} किग्रा है। यदि सूर्य एवं बृहस्पति के बीच की औसत दूरी 7.8×10^{11} मी है, तो सूर्य द्वारा बृहस्पति पर गुरुत्वाकर्षण का बल कितना होगा। यह मानकर कि सूर्य के चारों ओर बृहस्पति वृत्ताकार कक्षा में घूमता है बृहस्पति की चाल की गणना कीजिए। (4.146×10^{23} न्यूटन: 1.3×10^4 मी से$^{-1}$)

3.16 चन्द्रमा के पृष्ठ पर पलायन वेग की गणना कीजिए जब यह दिया है कि चन्द्रमा का अर्द्धव्यास 1.7×10^6 मी है और उसका द्रव्यमान 7.35×10^{22} किग्रा है। 2.4×10^3 मी से$^{-1}$)

3.17 गतिपालक चक्र प्रति मिनट 300 चक्कर कर रहा है। उसका कोणीय वेग रेडियन प्रति सेकंड में क्या है? (10π रेडियन/से)

3.18 धातु का एक छल्ला, जिसका अर्द्धव्यास 0.25 मी है और जिसका द्रव्यमान 2 किग्रा है, विराम अवस्था से प्रारंभ करके एक आनत समतल पर लुढ़कता है। यदि समतल के आधार पर पहुंचने पर इसका रैखिक वेग 2 मी से$^{-1}$ है, तो उस क्षण पर उसकी घूर्णात्मक गतिज ऊर्जा क्या है? (4 जूल)

3.19 एक ठोस बेलन किसी आनत समतल पर नीचे की ओर लुढ़कता है। इसका द्रव्यमान 2 किग्रा तथा इसका अर्द्धव्यास 0.1 मी है। यदि आनत समतल की ऊंचाई 4 मी है तो समतल के आधार तक पहुंचने पर बेलन की घूर्णात्मक गतिज ऊर्जा कितनी है? यह मान लीजिए कि दोनों पृष्ठ चिकने हैं। (26.13 जूल)

3.20 एक अपरिवर्ती बल-आघूर्ण लगाने पर एक पहिया विराम की स्थिति से 8 सेकंड में 200 रेडियन घूम जाता है। (क) कोणीय त्वरण कितना है? (ख) यदि वही बल-आघूर्ण कार्य करता रहे तो प्रारम्भ से 16 सेकंड पश्चात् पहिये का कोणीय वेग क्या होगा? (6.25 रेडियन से$^{-2}$; 100 रेडियन से$^{-1}$)

3.21 0.2 मी व्यास के पहिये की परिधि के चारों ओर एक रस्सी लपेटी हुई है। पहिये का अक्ष क्षैतिज है। 0.5 किग्रा द्रव्यमान का टुकडा रस्सी के सिरे पर बंधा है और विराम अवस्था से इसे गिरने दिया जाता है। यदि भार 4 सेकंड में 1.5 मीटर गिरता है तो पहिये का कोणीय त्वरण क्या है? पहिये का जड़त्व आघूर्ण भी ज्ञात कीजिये। (1.25 रेडियन से$^{-2}$, 0.588 किग्रा मी^{2})

3.22 किसी गतिपालक के द्रव्यमान तथा अर्द्धव्यास क्रमशः 25 किग्रा एवं 0.2 मी है। यह प्रतिमिनट 240 चक्कर कर रहा है। कितने बल-आघूर्ण द्वारा इसे 20 सेकंड में विराम अवस्था में लाया जा सकता है? यदि बल-आघूर्ण किसी बल के कारण है जो गतिपालक के किनारे पर स्पर्श रेखीय लग रहा है तो बल की मात्रा कितनी है? $\left(\frac{\pi}{5}\right.$ न्यूटन मी; π न्यूटन$\left.\right)$

अध्याय—4

सरल आवर्ती दोलन (Simple Harmonic Oscillation)

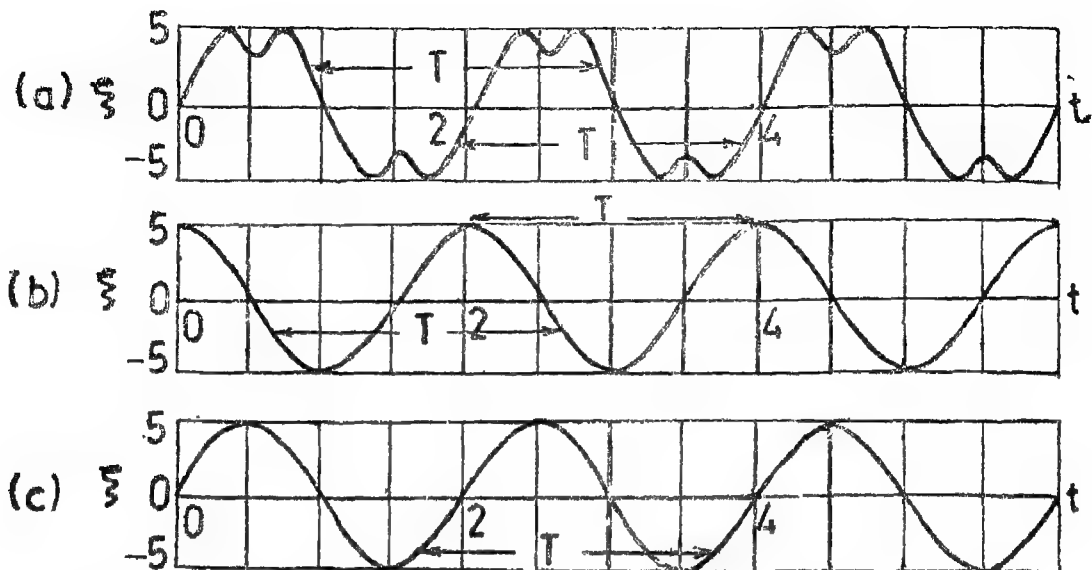
यदि कोई पिण्ड किसी केन्द्र के गिर्द आवर्ती क्रम से आगे-पीछे गति करें तो इस प्रकार की गति को दोलन (Oscillation) कहते हैं। इसके अनेक उदाहरण हम देख सकते हैं। जैसे, दीवार घड़ी का पेण्डुलम, किसी स्प्रिंग से लटके हुए भार के दोलन, तबले की पुड़ी या सितार के तार का कम्पन, तार से लटके किसी पिण्ड का कोणीय दोलन। यह उल्लेखनीय है, कि ग्रहों द्वारा सूर्य के परिक्रमण आवर्ती तो है, किन्तु उन्हें दोलन नहीं कहा जायेगा। इसका कारण यह है कि उसकी गति आगे-पीछे नहीं होती। घड़ी के सन्तुलन-चक्र की गति भी दोलन है। प्रायः सभी दोलन आवर्ती होते है, किन्तु सभी आवर्ती-गतियां दोलन नहीं होती।

दोलन के लिए एक आवश्यक प्रत्यय यह है, कि उसमें एक सन्तुलन की स्थिति होती है। यदि किसी निकाय को उस सन्तुलन स्थिति, अथवा साम्यावस्था से थोड़ा सा विस्थापित करके छोड़ दिया जाये तो यह अपनी उस माध्य अवस्था के गिर्द दोलन करने लगता है सभी दोलनों को प्रसंवादी फलनों (अर्थात् Sine और Cosine फ़लन) के पदों में व्यक्त कर सकते है। कोई दोलन जिसे किसी एक प्रसंवादी फलन के पदों में व्यक्त कर सकते हों, सरल आवर्ती दोलन (Simple harmonic oscillation) कहलाता है और इस अध्याय में हम ऐसे सरल आवर्ती दोलन के भिन्न-भिन्न पहलुओं पर विचार करेंगे। वैसे, सभी दोलनों को इस प्रकार के सरल आवर्ती दोलनों के पदों में समझा जा सकता है। इसलिए यांत्रिकी में सरल आवर्ती दोलन का अध्ययन महत्त्वपूर्ण है। केवल यांत्रिकी में ही नहीं, ध्वनि और प्रकाश में भी दोलकों द्वारा सरल आवर्ती तरंगे उत्पन्न होती है, और विद्युत-परिपथों में भी विभिन्न आवृत्तियो की प्रत्यावर्ती धाराओं को उत्पन्न करके आकाश में विद्युत चुम्बकीय तरंगें, जैसे, रेडियो तरंगें, प्रेषित की जाती है।

4.1 सरल आवर्ती दोलन का वर्णन (Description of simple harmonic oscillation)

किसी पिण्ड के अपनी साम्यावस्था से विस्थापन को हम ξ प्रतीक द्वारा व्यक्त करेंगे और दोलन को (ξ, t) ग्राफ द्वारा निरूपित करेंगे। चित्र 4.1 में इस प्रकार के तीन ग्राफ दिखाये गए हैं। इनमें से प्रत्येक में ξ का मान आवर्ती क्रम से किन्हीं दो सीमाओं के बीच घट-बढ़ रहा है, इसलिए यह दोलन व्यक्त करता है। इनमें से (b) में, हम ξ और t के लिए निम्नलिखित सरल समीकरण लिख सकते हैं :

$$\xi = a \cos\frac{2\pi t}{T} \tag{4.1}$$

(c) में भी हम ξ और t के लिए सरल व्यंजक लिख

चित्र 4.1 आवर्ती दोलन, (a) सरल आवर्त नहीं (b) सरल आवर्ती, (c) (b) की तरह पर कला में उससे $\pi/2$ पीछे

सकते हैं, अर्थात्

$$\xi = a \sin\frac{2\pi t}{T} \qquad (4.2)$$

ये दोनों ही ग्राफ सरल आवर्ती दोलन (Simple harmonic oscillation) को निरूपित करते है। एक प्रकार से, समीकरण (4.2) को ऐसे भी लिख सकते हैं :

$$\xi = a \cos\left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{\pi}{2}\right) \qquad (4.3)$$

या ग्राफ में वक्र (c) को काल के अक्ष पर T/4 पीछे हटा कर वक्र (b) से मिलता हुआ बना सकते हैं। इसलिए, सामान्यत: हम सरल आवर्ती गति को निम्नलिखित समीकरण से व्यक्त करेंगे :

$$\xi = a \cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \phi_0\right) \qquad (4.4)$$

अब हम सरल आवर्ती गति को अभिलक्षित करने वाली कुछ राशियों की परिभाषा करेंगे।

आयाम (Amplitude)

समीकरण (4.4) में राशि a विस्थापन ξ के अधिकतम परिमाण को निरूपित करती है। वास्तव में, ξ के मान में परिवर्तन +a और −a के भीतर ही सीमित है। यह राशि a सरल आवर्ती गति का आयाम (Amplitude) कहलाती है।

सामान्यतः, राशि ξ कुछ भी जैसे, रैखिक विस्थापन, कोणीय विस्थापन (जैसे घडी के सन्तुलन चक्र में) विद्युत आवेश (जैसे विद्युत परिपथों में), ताप (जैसे तापीय दोलनों मे) हो सकती है। समीकरण (4.4) को हम इसीलिए व्यापक दृष्टि से देखेंगे, और a को ξ द्वारा लक्षित किसी भी राशि का आयाम मानेंगे। रैखिक यांत्रिक दोलनों में निश्चित ही, ξ और इसलिए a का मात्रक मीटर होगा। कोणीय दोलनों में इनका मात्रक रेडियन होगा।

आवर्त-काल (Time period)

जिस न्यूनतम काल अवधि के पश्चात् आवर्तीय गति अपनी गति को पूर्ववत् पुन: दोहराती है, उस काल अवधि को आवृत्त काल (Time period) कहते है, और इसे T से निरूपित करते हैं। चित्र 4.1 की तीनों दशाओं में इसे दिखाया गया है। वास्तव में, किसी भी दिये हुए वक्र पर हम किसी भी बिन्दु से प्रारम्भ करके उस निकटतम काल-बिन्दु को ढूँढें जहाँ से वक्र फिर से अपने आप को दोहराता हो, तो उन दोनों बिन्दुओ के बीच की अवधि T होगी।

समीकरण (4.4) में हम देखेंगे कि यदि t के स्थान पर $t+T$ कर दिया जाये तो ξ का मान वही आता है। इसे हम विधिवत् यों लिख सकते हैं :

$$\xi(t+T)=\xi(t)$$

इस समीकरण द्वारा T की परिभाषा की जाती है। आवर्त-काल की विमा सामान्यत: काल होती है।[1]

आवृत्ति (Frequency)

इकाई काल में सम्पन्न होने वाले दोलनों की संख्या को आवृत्ति (Frequency) कहते है और इसे ν से निरूपित करते है। स्पष्ट है, कि

$$\nu=\frac{1}{T} \tag{4.6}$$

और ν का मात्रक प्रति सेकंड (s^{-1}) है। कभी-कभी इसे चक्र प्रति सेकंड (cps) यों भी व्यक्त करते है। $से^{-1}$ के लिए हट्र्स का नाम दिया गया है। अर्थात् जैसे,

500 $से^{-1}$ = 500 हट्र्स = 500 चक्र प्रति सेकंड

कोणीय आवृत्ति (Angular frequency)

बहुधा सुविधा के लिए एक अन्य राशि $\frac{2\pi}{T}$ जो $2\pi\nu$ के बराबर है, का उपयोग भी किया जाता है, और इसे हम कोणीय आवृत्ति (angular frequency) कहते है। आवृत्ति ν को 2π से गुणा करके जो राशि प्राप्त होती है यह केवल वही है। कोणीय आवृत्ति को ω से निरूपित करते है।[2] अर्थात्,

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=2\pi\nu \tag{4.7}$$

समीकरण (4.4) को कोणीय आवृत्ति के पदों में हम इस प्रकार लिख सकते हैं।

$$\begin{aligned}\xi&=a\cos(2\pi\nu t+\phi_0)\\&=a\cos(\omega t+\phi_0)\end{aligned} \tag{4.8}$$

कला (Phase)

समीकरण 4.4 में कोज्या के कोणांक को t काल बिंदु पर दोलन की कला (Phase) कहते है, और इसे ϕ से निरूपित करते है अर्थात्,

$$\phi=\frac{2\pi t}{T}+\phi_0 \tag{4.9}$$

कला का मान काल के अनुसार सतत् बढ़ता रहता है और इसकी वृद्धि के लिए निम्नलिखित व्यंजक होगा।

$$\phi=\frac{2\pi}{T}\triangle t=2\pi\nu.\triangle t=\omega.\triangle t \tag{4.10}$$

समीकरण (4.9) के अनुसार आवर्त काल T की परिभाषा इस प्रकार दी जा सकती है, कि यह वह काल है जितने में कला का मान 2π बदल जाता है।

राशि ϕ_0 को आरम्भिक कला (initial phase) कहते हैं, अर्थात वह कला जो $t=0$ काल बिन्दु पर हो। हम यह पहले ही देख चुके है, कि यदि हम सरल आवर्ती तरंग को ज्याफलन के पद में व्यक्त करे तो इसकी कला में $\pi/2$ का अन्तर होगा। इसलिए सुविधा इसमें है, कि हम किसी एक ज्या अथवा कोज्या के रूप में ही दोलन को व्यक्त करें। हम कोज्या का रूप प्रयोग करेंगे।[3] आरम्भिक कला वास्तव में इस बात पर निर्भर करती है कि हम अपने काल-बिन्दु का शून्य कहाँ लेते है।

---

1. समीकरण (4.4) द्वारा हम ξ के, किसी भी चर के रूप मे आवर्ती अन्तरण का वर्णन कर सकते हैं जैसे मरुस्थल में रेत की बनी हुई लहरो में यदि हम ξ को ऊँचाई मानें और इसका दूरी के साथ अन्तरण ग्राफ द्वारा निरूपित करें, तो उस दशा में t क्षैतिज दूरी निरूपित करेगा।
2. यहाँ इस बात का उल्लेख कर देना आवश्यक है कि वृत्तीय गति में (जैसे, ग्रह गति में) कोणीय वेग (angular velocity) आता है और उसके प्रतीक के रूप में भी यहाँ कोणीय आवृति के लिए प्रयुक्त प्रतीक ω लिखते हैं कोणीय वेग की विमा कोण काल होती है यदि हम कोण को विमाहीन लें तो इसकी विमा $से^{-1}$ आती है, जो कोणीय आवृति की विमा भी है। कोणीय वेग और प्रति सेकंड सम्पन्न परिक्रमा की संख्या में भी वही सम्बन्ध है जो समीकरण (4.7) द्वारा व्यक्त है।
3. यद्यपि 4.1 (b) और (c) दोनो ही तरंग-रूपों को ज्यावक्रीय कहते है।

4.2 सरल आवर्ती दोलन का गति-विज्ञान (Dynamics of simple harmonic oscillation)

यदि कोई पिण्ड साम्यावस्था में हो, तो इस पर लगने वाले सभी बल सन्तुलित होंगे । यदि इसे अपनी साम्यावस्था से किसी परिमाण ξ में विस्थापित कर दिया जाये, तो तीन सम्भावनायें उत्पन्न होंगी : (a) बल फिर भी सन्तुलित रहें, (b) विस्थापन के कारण उत्पन्न परिणामी बल की दिशा वही हो जो ξ की है, और (c) परिणामी बल की दिशा ξ के विपरीत हो । इन तीनों दशाओं में, (a) उदासीन साम्यावस्था है, (b) अस्थिर साम्यावस्था है, और (c) स्थिर साम्यावस्था है । हम अपना अध्ययन स्थिर साम्यावस्थाओं का करेंगे और उनके द्वारा उत्पन्न क्षोभों का अध्ययन करेंगे । इन दशाओं में विस्थापन ξ के कारण उत्पन्न बल सदा ξ की दिशा में विपरीत होता है और इसीलिए इसे **प्रत्यानयन बल** (Restoring force) कहते हैं । पेड़ की डाली को झुकाने, पैमाने को मोड़ने, कमानी को खींचने, रबड़ की गेंद को दबाने या लोलक को एक ओर हटाने जैसी सभी क्रियाओं में प्रत्यानयन बल उत्पन्न होता है ।

इस बल का परिमाण, सामान्यतः, ξ का कोई फलन होता है चाहे वह फलन कुछ भी हो, किन्तु इस बल के कारण पिण्ड सदैव अपनी साम्यावस्था में लौटने का प्रयत्न करता है, क्योंकि $\xi=0$ की स्थिति में पहुँचने तक की काल अवधि में इसमें गतिज ऊर्जा उत्पन्न हो जाती है, इसलिए वह मध्यावस्था से और आगे चला जाता है । फिर प्रत्यानयन बल के कारण इसका वेग कम होने लगता है, और अन्ततः एक अवस्था में पहुँचकर इसकी गतिज ऊर्जा शून्य हो जाती है । इसी प्रकार यह अपनी माध्य स्थिति के गिर्द आगे पीछे दोलन करता रहता है ।

किसी निकाय का आवर्त काल, सामान्यतः, दोलन के आयाम पर निर्भर कर सकता है। किन्तु जिन दोलनों का हम अध्ययन करेंगे उनमें आवर्त काल आयाम पर निर्भर नहीं करता । यदि ξ बहुत छोटा हो तो प्रत्यानयन बल का परिमाण ξ के समानुपाती होता है । तब हम लिख सकते हैं,

$$F=-k\xi \tag{4.11}$$

इसमें ऋण (—) चिन्ह यह दिखाने के लिए लगाया गया है कि F और ξ की दिशायें परस्पर विपरीत हैं । k उस निकाय का कोई अचर है, और इसे बल-अचर (force constant) कहते हैं । इसका मात्रक न्यूटन/मी होता है ।

यदि पिण्ड की संहति m हो तो न्यूटन के नियम के अनुसार त्वरण के लिए व्यंजक होगा,

$$\ddot{\xi}=\frac{\text{बल}}{\text{संहति}}=-\frac{k}{m}\xi \tag{4.12}$$

सुविधा के लिए, $\frac{k}{m}$ के स्थान पर ω^2 लिखते हैं ।

अर्थात्,

$$\omega^2=k/m \tag{4.13}$$

और तब समीकरण (4.12) को हम इस प्रकार लिखेंगे,

$$\ddot{\xi}=-\omega^2\xi \tag{4.14}$$

इस समीकरण का हल सरल नहीं है । किन्तु हम यह देख सकते है कि इसका हल निम्नलिखित रूप में व्यक्त किया जा सकता है,

$$\xi=a\cos(\omega t+\phi_o) \tag{4.15}$$

क्योंकि, समीकरण (4.15) का दो बार अवकलन करने पर

$$\dot{\xi}=-a\omega\sin(\omega t+\phi_o)$$
$$\ddot{\xi}=-a\omega^2\cos(\omega t+\phi_o)$$
या $$\ddot{\xi}=-\omega^2\xi$$

प्राप्त होगा । यह समीकरण (4.14) के समान है । अतः समीकरण (4.12) का हल समीकरण (4.15) द्वारा व्यक्त होता है, जहां

$$\omega=\sqrt{k/m}$$

समीकरण (4.15) द्वारा वर्णित गति को हम सरल आवर्ती दोलन कह ही चुके है । अब हम यह देखेंगे, कि वह कौन सी दशायें हैं जिनके अन्तर्गत इस प्रकार की गति उत्पन्न होती है । सरल आवर्ती दोलन वह होता है, जिस में किसी निकाय पर, उनकी साम्यावस्था में ξ विस्थापन कर देने के कारण, जो बल उत्पन्न हो, वह परिमाण में विस्थापन ξ के समानुपाती और दिशा में उसके विपरीत हो समीकरण (4.11) इस परिभाषा का गणितीय रूप है । समीकरण (4.14) का उपयोग करके भी हम सरल आवर्ती दोलन की परिभाषा बना सकते हैं । इसके अनु-

सार, यह वह दोलन है जिसमें त्वरण विस्थापन के समानुपाती किन्तु दिशा में उसके विपरीत होता है। इस प्रकार परिभाषा करने पर, अनुपात गुणांक का वर्गमूल कोणीय आवृत्ति होता है। इस प्रकार,

$$\nu=\omega/2\pi=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{m}} \qquad (4.16)$$

$$T=\frac{1}{\nu}=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad (4.16a)$$

सरल आवर्ती दोलन कोणीय भी हो सकते हैं। उस दशा में प्रत्यानयन बल-युग्म C उत्पन्न होगा, और न्यूटन का नियम लगाने के लिए हम संहति के स्थान पर जड़त्वीय आघूर्ण I का प्रयोग करेंगे। इस प्रकार समीकरण (4.16) का रूप होगा।

$$\nu=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{C}{I}} \qquad (4.17)$$

इस तरह से विभिन्न प्रकार के दोलनों में समीकरण (4.16) में प्रयुक्त राशियों k और m के अनुरूप उन दोलनों में प्रयुक्त होने वाली राशियों के नाम और रूप भिन्न-भिन्न हो जायेंगे। एक व्यापक नामकरण करने के लिए, **k** को कमानी-गुणांक (spring factor) और m को जड़त्व-गुणांक (Inertia factor) कहते हैं। इस नामकरण के पश्चात्, व्यापक रूप में लिखने पर समीकरण (4.16) का रूप होगा,

$$\nu=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\text{कमानी गुणांक}}{\text{जड़त्व गुणांक}}} \qquad (4.18)$$

4.3 सरल आवर्ती दोलनों के कुछ उदाहरण (Some examples of s.h. oscillations)

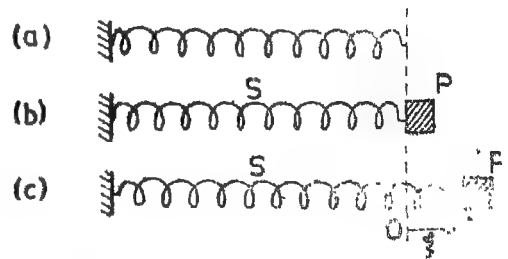
अब हम कुछ ऐसी अभिलक्षक स्थितियों पर विचार करेंगे जिनके अन्तर्गत सरल आवर्ती दोलन उत्पन्न होते हैं। इन सभी स्थितियों में सरलीकरण के लिए हमने कुछ बातें मान ली हैं, जिनका हम यथास्थान उल्लेख करेंगे।

कमानी पर दोलन करता द्रव्य (Oscillating mass on a spring)

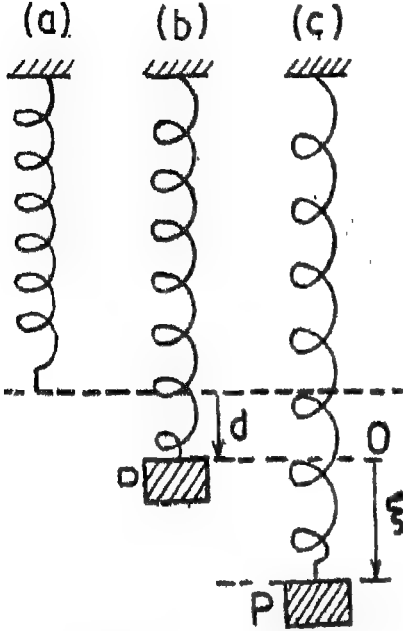
यदि किसी कमानी को दबाएं या उसे खींचें, और यदि उसकी लम्बाई में परिवर्तन कमानियों [illegible] लगभग 10 प्रतिशत से अधिक न हो, तो, उसमें [illegible] बल F=—k ξ के प्रकार का होता है। ऐसी कमानियां भी बनाई गई है जिसमें यह व्यंजक खिंचाव अथवा दबाव द्वारा कमानी की लम्बाई में शत-प्रतिशत का [illegible] देने तक भी सही होता है।

चित्र 4.2 के (a) में केवल कमानी, (b) में [illegible] लटका हुआ पिण्ड P साम्यावस्था में दिखाए गए है और (c) में (b) दशा के सापेक्ष पिण्ड को कमानी पर ξ का विस्थापन दिखाया गया है। हम मान सकते है कि पिण्ड घर्षण रहित क्षैतिज मेज पर रखा हुआ है [illegible] इस पर लगने वाला गुरुत्वीय बल मेज के प्रतिक्रिया-बल द्वारा निरस्त है, और पिण्ड पर लगने वाला अकेला बल कमानी का प्रत्यास्थी बल ही है।

यदि कमानी की संहति पिण्ड P की संहति m की तुलना में नगण्य हो, और यदि कमानी का [illegible] सिरा किसी ऐसे पिण्ड से जुड़ा हुआ हो जिसकी [illegible] की तुलना में बहुत अधिक है, तो दोलन की आवृत्ति निम्नलिखित समीकरण द्वारा व्यक्त की जाएगी,

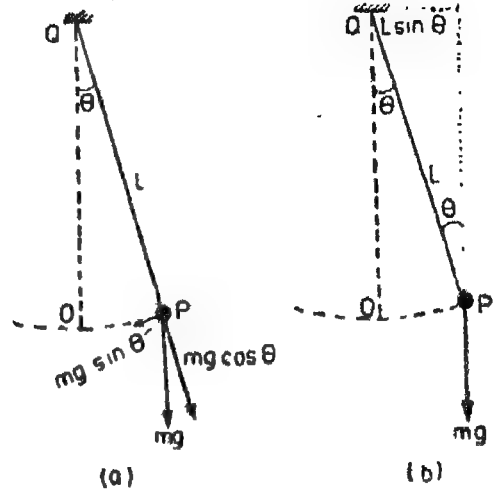
$$\nu=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad (4.19)$$

चित्र 4.2 किसी पिंड P का किसी कमानी S पर दोलन

यदि दोलन ऊर्ध्वाधर में हों—[illegible] कमानी के स्थान पर रबड़ के धागे से लटके हुए [illegible] कल्पना भी कर सकते हैं—तो भी परिणाम यही आएगा। इसमें अन्तर केवल इतना हो जाएगा कि साम्यावस्था, कमानी अथवा रबर की डोरी की सामान्य स्थिति न होकर वह स्थिति होगी जिसमें कमानी [illegible] तक

पहले ही खिंच चुकी हो (4.3)। आवृत्ति का मान वही रहेगा, और यह गुरुत्वीय त्वरण पर निर्भर करेगा।

चित्र 4.3 किसी कमानी पर किसी द्रव्यमान का ऊर्ध्वाधर दिशा में दोलन

सरल लोलक (Simple pendulum)

लोलक बनाने के लिए हम किसी पत्थर को एक डोरी से बांध कर इसे खूंटी से लटका सकते हैं। यह लोलक दीवार घड़ी के पैण्डुलम के समान नहीं है क्योंकि निचला भाग आपेक्षाकृत अधिक भारी होते हुए भी घड़ी का पैण्डुलम एक दृढ़ पिण्ड होता है। दूसरी ओर, सरल लोलक भी यह नहीं है क्योंकि आदर्श सरल लोलक में डोरी अप्रत्यास्थी और संहति शून्य होनी चाहिए और इसका गोलक एक बिन्दु के समान भारी पिण्ड होना चाहिए। जबकि पत्थर को डोरी से बाँधकर बनाए गए लोलक में ये दोनों बातें नहीं हैं। आदर्श लोलक का आधार दृढ़ और अनन्त संहति वाला होना चाहिए।

सरल लोलक (चित्र 4.4) को हम दो प्रकार से देख सकते हैं। चित्र 4.4 (a) में सीधा नीचे लगने वाला

चित्र 4.4 दो विधियों से सरल लोलक की जाँच (a) गोलक P की रैखिक गति की भाँति, (b) धागे और गोलक QP की Q चारों ओर कोणीय गति की भाँति

गुरुत्वीय बल mg अपने दो घटकों में वियोजित दिखाया गया है : डोरी की दिशा में इसका घटक $mg\cos\theta$ डोरी के खिंचाव T से संतुलित है, और डोरी के लम्बवत् लगने वाला घटक $mg\sin\theta$ ही गोलक पर लगने वाला अकेला बल है। गोलक की गति वृत्त के एक चाप में होगी। यदि इसका आयाम बहुत छोटा हो, तो इसके पथ को हम एक सरल रेखा में मान सकते हैं। तब $mg\sin\theta$ को, सन्निकटतः, $mg\theta$ के बराबर ले सकते हैं। इस प्रकार,

बल $= mg\theta$ विचलन $L\theta$ और कमानी-गुणांक $\frac{mg}{L}$

होंगे। संहति गुणांक का मान गोलक की संहति m के बराबर होगा। इसलिए,

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{mg/L}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}} \quad (4.20)$$

यहाँ एक उल्लेखनीय तथ्य यह है कि m का पद कमानी गुणांक और जड़त्व-गुणांक दोनों में ही आता है, और इसलिए, समीकरण के व्यंजक में इनके मानों को रखने पर m निरस्त हो जाता है।[1]

चित्र 4.4 (b) में हम लोलक को दूसरे रूप में देखते

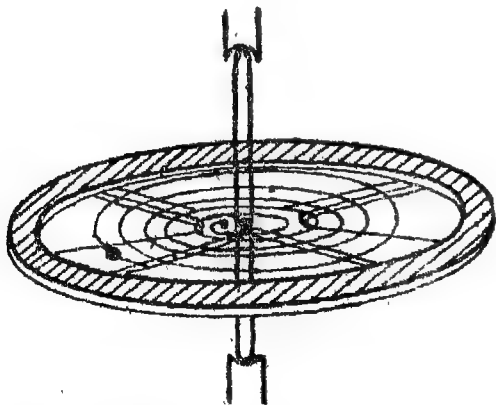
1. वास्तव में, mg/L में आया हुआ m गुरुत्वीय संहति है और अंश में आया हुआ m का पद जड़त्वीय संहति है।

हैं। इसमें उसकी कल्पना एक ऐसे निकाय mg के रूप में कर रहे है जो Q के गिर्द कोणीय गति करता है। आधार बिन्दु के गिर्द निकाय के घूर्णन का बल-आघूर्ण mg L$\sin\theta$ होगा। θ के बहुत छोटा होने पर इसका मान mgLθ होगा। QP निकाय का Q के गिर्द जड़त्व-आघूर्ण mL^2 होगा, क्योंकि डोरी की संहति शून्य है। तब,

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\text{कमानी-गुणाक. } mgL}{\text{जड़त्व-गुणाक, } mL^2}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}} \quad (2.21)$$

इससे भी समीकरण (4.20) के तुल्य परिणाम प्राप्त हुआ। इस प्रकार की व्युत्पत्ति लाभप्रद है, क्योंकि इसमें हमने सन्निकटन केवल एक ही स्थान पर किया, अर्थात्, $\sin\theta = \theta$ रखने में। अधिक आयाम के दोलनों के लिए तथा दृढ़ पिण्ड-पैण्डुलम के लिए भी यह विधि अपनाई जा सकती है। उन दशाओं में बिना सन्निकटन किए अधिक यथार्थ गणितीय हल खोजना पड़ेगा।

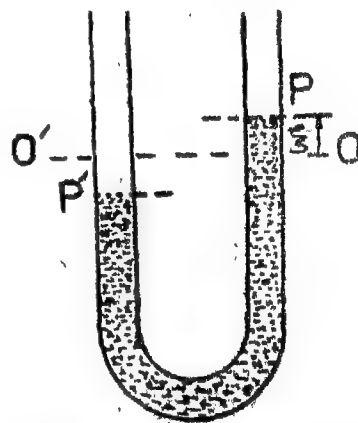
घड़ी का संतुलन-चक्र (Balance wheel of a clock)

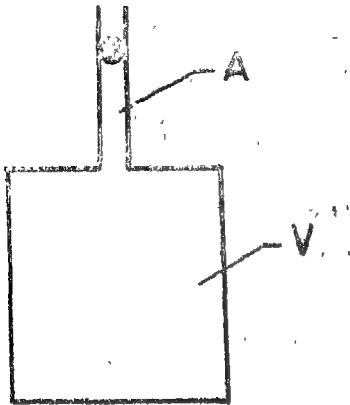
घड़ियों में दो हीरक चूलों के बीच, अक्ष पर घूमता एक संतुलन-चक्र लगा होता है। इसके कोणीय दोलन जो

चित्र 4.5 किसी घड़ी का काल नियंत्रक पहिया तथा बालकमानी

इसकी माध्य साम्यावस्था के गिर्द होते हैं, एक बाल कमानी द्वारा नियंत्रित होते हैं। किसी कोणीय विस्थापन θ के लिए बालकमानी में एक बल-आघूर्ण $C\theta$ प्रत्युत्पन्न होता है। यदि संतुलन चक्र का अपनी अक्ष के गिर्द दोलन के लिए जड़त्व-आघूर्ण I है, तो,

$$\nu = \left(\frac{1}{2\pi}\right)\sqrt{\frac{C}{I}} \quad (4.22)$$

यू-नली में भरा द्रव (Liquid filled in a U-tube)

चित्र 4.6 में किसी यू-नली में भरा हुआ द्रव दिखाया गया है। इसके तल को अपनी साम्यावस्था से थोड़ा सा

चित्र 4.6 किसी U नलिका में दोलन करता द्रव, OO' संतुलन की स्थिति है, PP' विस्थापित स्थिति है

विस्थापन ξ दे दिया गया है। यू-नली के दोनों ओर का क्षेत्रफल A बराबर मानते हुए, द्रव पर लगने वाले बल का मान $-2\xi A\rho g$ होगा। इसमें ρ द्रव का घनत्व और g गुरुत्वजनित त्वरण है। ऋण चिन्ह यह बताने के लिए लगाया गया है कि यदि दाहिनी भुजा में द्रव ξ ऊंचाई तक उठे तो यह बल उसे नीचे लाने का प्रयत्न करेगा। यहाँ भी बल का रूप $-k\xi$ प्रकार का है, जिसमें $k = 2A\rho g$। इसलिए, द्रव में सरल आवर्ती दोलन होंगे और उसकी कोणीय आवृत्ति का मान $\omega = \sqrt{2A\rho g/A\rho L}$ होगा। इसमें $A\rho L$, L लम्बाई में भरे द्रव की संहति है। अंततः इसका मान $\omega = \sqrt{2g/L}$ हुआ, और स्पष्ट है कि ω का मान द्रव के घनत्व या नली के क्षेत्रफल दोनों में से किसी पर निर्भर नहीं करता।

चित्र 4.7 वायु कोष्ठ की ग्रीवा में एक गोला

सुग्रीव वायु कक्ष (Air-chamber with neck)

चित्र 4.7 में V आयतन का एक वायु कक्ष दिखाया गया है, जिसमें एक A काट क्षेत्र की एक ग्रीवा बनी हुई है, और उसमें m संहति की एक गोली आसानी से फँसी हुई है। यदि गोली को ξ विस्थापन देकर नीचे दबाया जाए तो वायु का आयतन ξA कम हो जाता है और कक्ष में दाब बढ़ जाता है। इस बढ़े दाब का मान होगा,

$$P=E.\frac{\xi A}{V}$$

इसमें E वायु की प्रत्यास्थता है। इसके कारण गोली पर एक बल लगेगा जो ξ की विपरीत दिशा में, अर्थात् ऊपर की ओर, लगेगा और इसका मान PA होगा, इसलिए, $F=-(EA^2/V)\xi$ प्राप्त हुआ। इसका स्वरूप $-k\xi$ प्रकार का है, इसलिए गोली में सरल आवर्ती दोलन होंगे, जिसकी कोणीय आवृत्ति $\omega=\sqrt{EA^2/Vm}$ होगी। इसमें यह माना गया है कि ग्रीवा में हवा की संहति गोली की संहति की तुलना में नगण्य है।

अब उस चरम स्थिति पर विचार कीजिए जब ग्रीवा में गोली न हो, और वायु स्वयं ही दोलन करने लगे। उस दशा में यदि ग्रीवा की लम्बाई L हो और वायु का घनत्व ρ हो, तो $m=AL\rho$, और, इसलिए,

$$\omega=\sqrt{EA/VL\rho}.$$

उदाहरण 4.1

किसी कमानी को 0.1 मीटर दबाने पर उसमें उत्पन्न प्रत्यानयन बल 10 न्यूटन का होता है। 4 कि ग्रा का एक पिण्ड इस पर रखा गया है। गणना करके ज्ञात कीजिए : (1) कमानी का बल गुणाँक (2) पिण्ड के भार के कारण कमानी में अवनमन (g का मान 10 न्यूटन/कि ग्रा मानिये) और (3) पिण्ड का आवर्त काल।

$$k=\frac{\text{बल}}{\text{विस्थापन}}=\frac{10 \text{ न्यूटन}}{0.1 \text{ मी}}=100 \text{ न्यूटन/मी}$$

$$\text{विस्थापन}=\frac{\text{बल}}{k}=\frac{4 \text{ किग्रा}\times 10 \text{ न्यूटन/किग्रा}}{100 \text{ न्यूटन/मी}}$$

$$=0.4 \text{ मी}$$

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}=2\pi\sqrt{\frac{4\text{कि ग्रा}}{100 \text{ न्यूटन मी}}}=\frac{2\pi}{5} \text{ से}$$

उदाहरण 4.2

HCl के अणु में मानिये कि Cl के परमाणु की संहति अनन्त है और केवल H का परमाणु दोलन कर रहा है। यदि HCl के अणु के दोलनों की आवृत्ति 9×10^{13} से$^{-1}$ हो, तो इसका बल स्थिरांक ज्ञात कीजिये। अवोगाद्रो संख्या का मान 6×10^{23} प्रति कि ग्रा अणु है।

$$\text{हल: } \nu=\frac{1}{2\pi}\sqrt{k/m}$$

$$k=4\pi^2\nu^2m$$

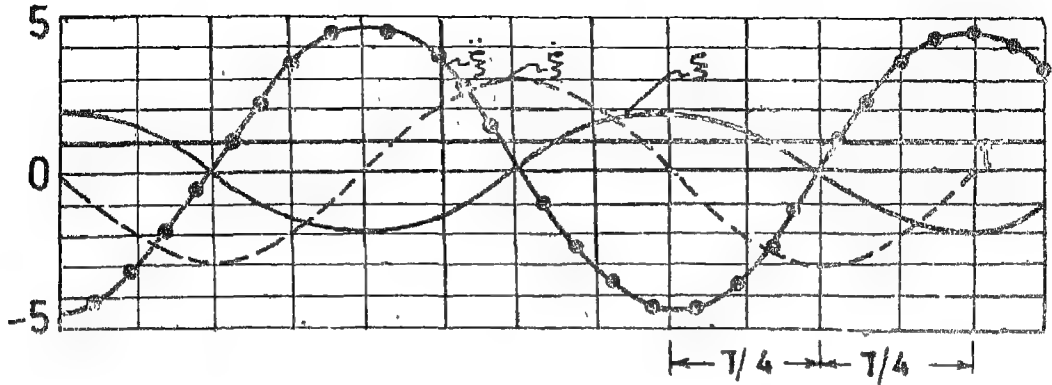
$$=4\times(3.14)^2\ (9\times10^{13})^2\ \frac{1}{6\times10^{23}}$$

$$=5.4\times10^2\frac{\text{न्यूटन}}{\text{मी}}$$

उदाहरण 4.3

एक पेण्डुलम घड़ी सही समय दे रही है। यदि उसके पेण्डुलम की लम्बाई में 0.1 प्रतिशत की वृद्धि हो जाये, तो प्रतिदिन समय में कितनी त्रुटि आ जायेगी ?

एक दिन में सेकंडों की सही संख्या 86400 है। यदि घड़ी द्वारा दिये हुए सेकंडों की त्रुटिपूर्ण संख्या 86,400+x हो तो समीकरण (4.17) के अनुसार

$$\frac{86400+x}{86400}=\sqrt{\frac{L}{L+0.001L}}$$

चित्र 4.8 एक ही दोलन के लिए काल t के साथ ξ, ξ̇ तथा ξ̈ का ग्राफ यदि $\omega=1500$ हट्र्स और ξ के लिए पैमाना है 1 मात्रक $=10^{-5}$ सेमी तो ξ̇ के लिए यह होगा 1 मात्रक $=10$ सेमी सेकड तथा ξ̈ के लिए यह होगा 1 मात्रक $=10^{1}$ सेमी सेकड

$$=(1+0.001)^{-\frac{1}{2}}$$

$$=1-\tfrac{1}{2}(0.001)$$

यहां L सही लम्बाई और 0.001L इसमें वृद्धि है। इसलिये,

$$\frac{x}{86400}=-\frac{1}{2}(0.001)$$

अर्थात्, $x=-43$ से

अर्थात् घड़ी प्रति दिन 43 सेकंड सुस्त चलेगी।

4.4 कण-वेग और त्वरण (Particle velocity and acceleration)

विस्थापन समीकरण

$$\xi=a\cos(\omega t+\phi) \tag{4.23}$$

द्वारा निरूपित सरल आवर्ती दोलन के लिये वेग का समीकरण होगा

$$\dot{\xi}=-\omega a\sin(\omega t+\phi)$$
$$=\omega a\cos(\omega t+\phi+\pi/_2) \tag{4.24}$$

और त्वरण के लिए समीकरण,

$$\ddot{\xi}=-\omega^2 a\cos(\omega t+\phi)$$
$$=\omega^2 a\cos(\omega t+\phi+\pi) \tag{4.25}$$

होगा। इन दोनों समीकरणों की तुलना करने से निम्नलिखित तथ्य प्रकाश में आते हैं :

(1) वेग का आयाम ω और a के गुणनफल के बराबर है। त्वरण का आयाम a का ω^2 गुना है।

(2) विस्थापन के सापेक्ष वेग π/2 कला आगे है और त्वरण और भी π/2 कला आगे है।

π/2 कला आगे का अर्थ दूसरे शब्दों में यह भी है कि वह T/4 काल आगे है, क्योंकि एक आवर्त काल 2π कला के अनुरूप होता है। इसलिए ग्राफीय निरूपण में वेग-काल का ग्राफ विस्थापन काल ग्राफ से T/4 काल आगे हो जाता है। चित्र 4.8 में ये तीनों ग्राफ एक ही काल अक्ष पर दिखाए गए हैं, और इनमें Y-अक्ष पर ξ, ξ̇ और ξ̈ के लिए भिन्न-भिन्न स्केल चुने गए है।

यदि वेग-आयाम के लिए प्रतीक v_o, त्वरणआयाम के लिये g_o चुनें, तो उपरिलिखित तथ्यों में से पहले तथ्य को हम इस प्रकार लिख सकते हैं,

$$v_o=\omega a;\ g_o=\omega^2 a \tag{4.26}$$

आवृत्ति ν के पदों में इसी व्यंजक को इस प्रकार लिखेंगे :

$$v_o=2\pi\nu a;\ g_o=4\pi^2\nu^2 a \tag{4.27}$$

उदाहरण 4.4

किसी लोलक के दोलक का आयाम 5.0 से मी और

उसका आवर्त काल 2 से है। उसका अधिकतम वेग ज्ञात कीजिये।

हल : a=5.0 से मी; $\nu=\frac{1}{T}=0.5$ से$^{-1}$

$v_o=2\pi\times0.5\times5.0$ से मी से$^{-1}$

=16 से मी से$^{-1}$

उदाहरण 4.5

प्राक्षेपिक लोलक में इसके गोलक पर क्षैतिज दिशा से बन्दूक की गोली चलाई जाती है और लोलक के आयाम को माप कर गोली का वेग निकाला जाता है। इस प्रकार के एक लोलक में 500 ग्रा संहति का रेत का थैला गोलक के रूप में लगाया गया है। जब इस गोलक पर 2.0 ग्रा संहति की एक गोली लगी तो वह रेत में धंस गई और उसमे उत्पन्न दोलन का आयाम 20 से मी हुआ। लोलक प्रति मिनट 20 दोलन कर रहा हो, तो गोली का वेग ज्ञात कीजिये।

a=20 से मी, $\nu=\frac{20}{60}=\frac{1}{3}$ से$^{-1}$

$v_o=2\pi\times\frac{1}{3}\times20=\frac{40\pi}{3}$ सेमी से$^{-1}$

यदि गोली का वेग v हो, तो, रैखिक संवेग के संरक्षण के सिद्धांत के अनुसार

$2.0v=(2+500)v_o$

$v=\frac{502}{2.0}\times\frac{40\pi}{3}$ सेमी से$^{-1}$

=105 मी से$^{-1}$

4.5 सरल आवर्ती गति में ऊर्जा (Energy in simple harmonic motion)

सरल आवर्ती दोलक में ऊर्जा अंशतः गतिज (E_k) और अंशतः स्थितिज (E_p) होती है। जब विस्थापन शून्य होता है तो स्थितिज ऊर्जा भी शून्य होती है, क्योंकि साम्यावस्था को हम वह अवस्था मान सकते हैं जिसके सापेक्ष स्थितिज ऊर्जा मापी जाती है। जब विस्थापन अधिकतम (+a या —a) होता है, तो गतिज ऊर्जा शून्य होती है, क्योंकि वहाँ वेग शून्य होता है, और इसलिये वहाँ समस्त ऊर्जा स्थितिज होनी चाहिये। ऊर्जा संरक्षण के सिद्धान्त के अनुसार, (और क्योंकि हम घर्षण द्वारा ऊर्जा का ह्रास नगण्य मान रहे है) कुल ऊर्जा (E) अचर होनी चाहिए। इसलिए दोलन की समस्त ऊर्जा (E) गतिज ऊर्जा के अधिकतम मान के बराबर होनी चाहिए, इसे हम E°_k से निरुपित करेंगे। अर्थात्,

$$E=E^{\circ}_k$$

$$\text{या } E=\tfrac{1}{2}mv_o^2=2m\pi^2\nu^2a^2 \qquad (4.28)$$

इसमें v_o वेग आयाम है, और हमने यहाँ समीकरण (4.27) का उपयोग किया है। स्थितिज ऊर्जा का अधिकतम मान (E°_p) भी $2\pi^2\nu^2a^2m$ के बराबर भी होना चाहिए।

यदि दोलन कोणीय हों, तो संहति m के स्थान पर दोलक का अपनी घूर्णन अक्ष के गिर्द जड़त्व आघूर्ण रखेंगे, और v_o के स्थान पर कोणीय वेग का आयाम θ_o लिखेंगे। अर्थात्

$$E=2\pi^2\nu^2\theta_o^2I \qquad (4.29)$$

स्थितिज ऊर्जा प्राप्त करने के लिए हम निम्नलिखित सरल नियम अपना सकते है,

$$E_p=E-E_k=E^{\circ}_k-E_k$$
$$=\tfrac{1}{2}m(v_o^2-v^2)$$

समीकरण (4.23), (4.24) और $\omega^2=\frac{k}{m}$ का उपयोग करके छात्र स्वयं देख सकता है कि

$$E_p=\tfrac{1}{2}k\xi^2;\ E=E^{\circ}_p=\tfrac{1}{2}ka^2 \qquad (4.30)$$

यह समीकरण (4.28) के अनुकूल है क्योंकि k का मान ω^2m अर्थात् $4\pi\nu^2m$ है।

उदाहरण 4.6

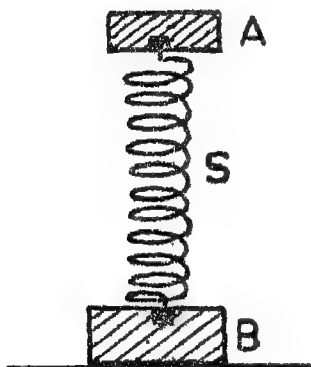
दो पिण्ड A और B, जिनकी संहतियाँ क्रमशः 1 कि ग्रा और 2 कि ग्रा है, 400 न्यूटन/मी बल-स्थिरांक वाली किसी कमानी से जुड़े हुये है (चित्र 4.10)। B एक क्षैतिज मेज पर रखा हुआ है, और A को इसकी विश्राम स्थिति से d=2 से मी हटा कर इस प्रकार विस्थापित कर देते हैं कि कमानी दब जाती है और उसके बाद इसे छोड़ देते है। गणना कीजिये (1) दोलन आवृत्ति (2) A का अधिकतम वेग, (3) मेज का B की प्रतिक्रिया से उत्पन्न सरल आवर्ती परिवर्तन का आयाम।

हल : आवृत्ति $\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$

$= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{440}{1}} = \frac{10}{\pi}$ हट्र्स (Hz)

दोलन ऊर्जा $E = \frac{1}{2}kd^2$

$= 200 \left(\frac{2}{100}\right)^2 = \frac{2}{25}$ जूल (J)

औसत प्रतिक्रिया $R_o = 3$ कि ग्रा भार

$= 30$ न्यूटन

चित्र 4.9 उदाहरण 4.6 के लिए चित्र

A के दोलन करने पर कमानी S का खिंचाव निरंतर एक समान अर्थात् 1 कि ग्रा भार=10 न्यूटन नहीं रहता। 2 से मी संपीडन के कारण एक अतिरिक्त तनाव=kx=8 न्यूटन का और लगने लगता है, और इसी प्रकार, 2 से मी-का खिंचाव होने पर कमानी का तनाव 8 न्यूटन कम हो जाता है। इसलिए

R_o के परिवर्तन का आयाम=8 न्यूटन

अर्थात्, प्रतिक्रिया का मान (30+8) और (30−8) न्यूटन के बीच परिवर्तन होता रहेगा।

4.6 अनुनाद (Resonance)

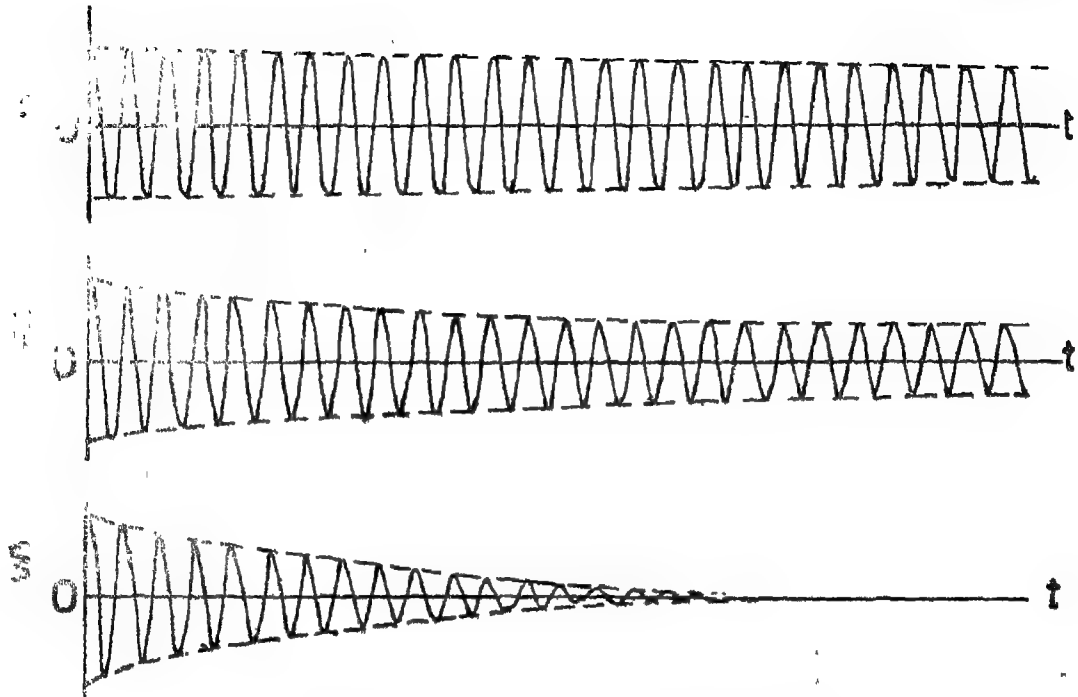
दोलन आरम्भ करने के लिए निकाय को यदि थोड़ा विस्थापित कर दिया जाये, या उसको आरम्भ में कोई गति v_o दे दी जाये तो दोलन प्रारम्भ हो जाते है। पहली अवस्था में हमने ऊर्जा स्थितिज रूप में दी अर्थात् जो ऊर्जा दी गई उसका मान $E = \frac{1}{2}k\xi^2$ है। दूसरी अवस्था में ऊर्जा गतिज रूप में दी गई, और इसका मान $E = \frac{1}{2}mv_o^2$ है। उसके पश्चात यदि निकाय को छोड़ दें तो यह अपनी आवृत्ति के अनुरूप दोलन करता रहेगा। इसे हम **मुक्त दोलन** कहते हैं क्योंकि इस अवस्था में निकाय को कुछ ऊर्जा देने के पश्चात मुक्त छोड़ दिया जाता है। इसकी आवृत्ति के लिए व्यंजक

$$\nu_o = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

होता है। अनुबन्ध 0 का प्रयोग यह दर्शाने के लिए किया गया है कि दोलनों की आवृत्ति मुक्त है।

व्यवहार में निकाय की गति पर सदैव कोई प्रतिरोध लगा रहता है जिसके द्वारा इसकी ऊर्जा का ह्रास होता है। यह ऊर्जा या तो निकाय से वातावरण में स्थानान्तरित हो जाती है या फिर कमानी में स्वयं ही ऊष्मा के रूप रूपांतरित होती है। फलतः, दोलन की ऊर्जा, और इसीलिए इसका आयाम, समय के साथ-साथ कम होते जाते हैं (चित्र 4.10) इन्हें **अवमंदित दोलन** कहते हैं।

अब यदि हम इन अवमंदित दोलनों में जितनी ऊर्जा का ह्रास हो रहा हो उतनी ऊर्जा इसे देते चले जायें तो दोलनों के अवमंदन को रोक सकते हैं। दूसरे शब्दों में, यदि इस निकाय को लगातार इतनी ऊर्जा दी जाती रहे, कि यह अपनी आवृत्ति ν_0 पर अपने दोलनों को बनाये रखे तो जितना ऊर्जा का इसमें ह्रास हो रहा है उतनी ही ऊर्जा उसको मिल भी रही है, और इसलिए यह अपने दोलनों को बनाये रखेगा। ऐसे दोलनों को **पोषित दोलन** कहते हैं। $\xi = a\cos(\omega t + \phi_o)$ के रूप में लिखी गई दोलन समीकरण, जिसमें आयाम अचर रहता है, वास्तव में इस प्रकार के पोषित दोलनों को अथवा आदर्श स्थिति में प्राप्त मुक्त दोलनों को व्यक्त करती है।

बाहर से दी जाने वाली ऊर्जा इस प्रकार भी दी जा सकती है कि वह किसी विशेष आवृत्ति ν का पोषण करे। बाहर से ऊर्जा देने वाले स्रोत को हम **चालक** कहेंगे। तो चालक की आवृत्ति ν हुई और विचाराधीन निकाय,

चित्र 4.10 लघु माध्यम, एवं वृहत् अवमंदनों के लिए अवमंदित दोलन

जिसकी आकृति आवृत्ति ν_0 है, ν आवृत्ति के चालक द्वारा चलाया हुआ माना जायेगा। इस स्थिति में समय बीतने पर प्राकृतिक, अर्थात् मुक्त आवृत्ति ν_0 थोड़ी देर में मर जाती है, फिर निकाय अपने चालक की आवृत्ति ν के अनुसार दोलन करना आरम्भ कर देता है। ν आवृत्ति के दोलन धीरे-धीरे प्रबल होकर अन्त में उतना आयाम प्राप्त कर लेंगे जितने पर उनको दी हुई ऊर्जा निकाय की ऊर्जा-ह्रास के बराबर हो। ऐसे दोलनों को प्रणोदित दोलन कहते हैं और उनकी आवृत्ति ν होती है, ν_0 नहीं।

प्रणोदित दोलनों में चालक द्वारा दी हुई ऊर्जा का अवशोषित अंश कम होगा, यदि ν और ν_0 का अन्तर बहुत अधिक हो, तो प्रणोदित कम्पन का आयाम कम होगा। किन्तु यदि ν का मान ν_0 के निकट हो, तो प्रणोदित कम्पन का आयाम भी बहुत बढ़ जाता है। ν जब ν_0 की ओर [illegible] है ($\nu \rightarrow \nu_0$) तो उस स्थिति को अनुनाद कहते हैं, और इस अवस्था में कहा जाता है कि चालक और चालित दोनों अनुनाद में है, या दोनों निकाय अनुनादित हैं। यदि अनेक आवृत्तियों के चालक विद्यमान हों, तो उन आवृत्तियों में से चालित केवल उसी आवृत्ति का वरण करता है जो इसकी मुक्त आवृत्ति के बराबर हो। जब हम अपने रेडियो को किसी विशेष रेडियो स्टेशन से मिलाते हैं तो यही होता है। हमारे एन्टेना के गिर्द सभी स्टेशनों से आने वाली तरंगें विद्यमान होती हैं, परन्तु हमारा रेडियो उसी स्टेशन का चयन करता है जिसकी आवृत्ति का वरण करने के लिए हमने अपने रेडियो परिपथ को समस्वरित किया हो अर्थात् मिलाया हुआ हो।

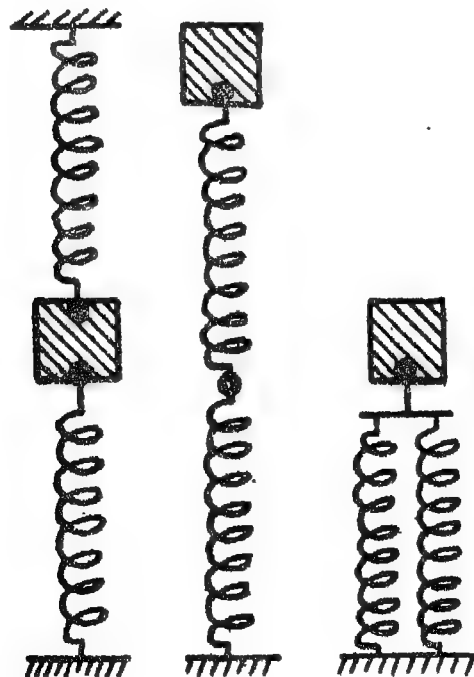
कुछ मौकों पर अनुनाद बड़ा हानिकारक भी हो जाता है। जैसे, यदि सेना किसी पुल पर मार्च करती जा रही हो, तो यह सम्भव है कि सैनिकोंके पद-चापों की आवृत्ति पुल की प्राकृतिकआवृत्ति से मेल खा जाये और उस अवस्था में पुल अनुनाद के कारण बहुत जोर से दोलन करने लग जायें। दोलन का आयाम बहुत अधिक बढ़ जाये तो पुल टूट भी सकता है। इसलिए पुल पार करते समय सैनिकों को समवेत प्रकार से मार्च करने को नहीं

कहा जाता। कभी-कभी ऊबड़-खाबड़ सड़क पर चलते हुए कार में दोलन होने लगते हैं, और इन दोलनों की आवृत्ति यदि सड़क से उत्पन्न धचकों की आवृत्ति के अनुरूप होने लगती है तो चतुर ड्राईवर तुरन्त ही कार की चाल को बदल देता है। भू-गर्भ में भी प्राय: कुछ दोलन होते रहते हैं। वे इतने सूक्ष्म होते हैं कि सामान्यतः उनका पता नहीं चलता। परन्तु यदि देवयोग से इनकी आवृत्ति किसी झील की तरंगों की आवृत्ति अथवा किसी बिल्डिंग की आवृत्ति से मेल खा जाये, तो इनका आयाम इतना अधिक हो सकता है कि क्षति भी हो सकती है।

प्रश्न-अभ्यास

4.1 3, 4, 9, 16, किग्रा के द्रव्यमान बारी-बारी से किसी कमानी पर दोलन कर रहे हैं जिसका बल नियतांक 100 न्यूटन/किग्रा है। कोणीय आवृत्तियों को निकालिए। (10, 5, 10/3, 5/2 हर्ट्स)

4.2 1 किग्रा के द्रव्यमान को बारी-बारी से 1, 4, 9, 16 न्यूटन/किग्रा बल नियतांक वाली कमानियों पर दोलित किया जाता है। कोणीय आवृत्तियों को निकालिये। (1, 2, 3, 4 हर्ट्स)

4.3 किसी सड़क की ढाल के अधोभाग की वक्रता त्रिज्या R है। M द्रव्यमान के रिक्शे को अधोभाग से कुछ ऊँचाई पर छोड़ दिया जाता है और वह अधोभाग के दोनों ओर दोलन करता है। दोलन काल का व्यंजक निकालिए। $\left(T = 2\sqrt{\frac{R}{g}}\right)$

चित्र 4.11

4.4 एक ही (ξ,t) ग्राफ पर दो सरल आवर्ती दोलकों A तथा B को दिखाइये जिनके आयाम 1:2 के अनुपात में एवं आवृत्तियाँ 1:3 के अनुपात में हैं। ξ_A तथा ξ_B को जोडने से प्राप्त वक्र को दिखाइये।

4.5 किसी सरल आवर्ती दोलन को

$$\xi = 0.34 \cos(3000t + 0.74)$$

से निरूपित किया जाता है जिसमें ξ तथा t क्रमशः मिमी एवं सेकंड में हैं। (i) आयाम (ii) आवृत्ति एवं कोणीय आवृत्ति, (iii) दोलन काल, तथा (iv) प्रारम्भिक कला को निकालिये।

(0.34 मि मी, 1500/π हर्ट्स, 3000 हर्ट्स, π/1500 से, 0.74 रेडियन)

4.6 दो सर्वसम कमानियों को, जिनमें प्रत्येक का बल नियतांक K है, चित्र 4.11 में प्रदर्शित दो भिन्न-भिन्न विधियों से जोड़ा जा सकता है।

प्रत्येक स्थिति में किसी पिंड P के दोलन के लिए कमानी घटक निकालिये। (2K, K/2, 2K)

4.7 किसी गोले को एक तार द्वारा लटकाया हुआ है। गोले को 30° से घुमाने पर 46 न्यूटन का भी बल आघूर्ण उत्पन्न होता है। यदि गोले का जड़त्व आघूर्ण 0.082 किग्रा मी^{2} है तो कोणीय दोलनों की आवृत्ति ज्ञात कीजिए। (1.65 हर्ट्स)

4.8 कोई आदमी जिसका सामान्यतः भार 60 किग्रा है किसी प्लेटफार्म पर खड़ा है जो 2.1 से$^{-1}$ की आवृत्ति तथा 5 सेमी आयाम का सरल आवृत्ति दोलन ऊपर नीचे कर रहा है। यदि प्लेटफार्म पर रखी किसी मशीन से विभिन्न समयों पर आदमी का भार ज्ञात किया जाता है तो इसके अधिकतम तथा अल्पतम प्रेक्षणों को निकालिए। (g का मान 10 मी से$^{-2}$ लीजिए)। (107 कि ग्रा, 12 किग्रा)

4.9 लकड़ी के एक सिलिंडरनुमा टुकड़े को पानी पर तैराया जाता है। इसका अनुप्रस्थ काट 15.0 से मी^{2} है तथा द्रव्यमान 220 ग्राम है। इसकी तली से 50 ग्राम का भार लटकाया हुआ है। सिलिंडर ऊर्ध्वाधर दिशा में तैर रहा है। संतुलन की अवस्था से इसे थोड़ा नीचे दबा कर छोड़ दिया जाता है। यदि लकड़ी का विशिष्ट घनत्व 0·30 तथा g=9.8 मी से$^{-2}$ है तो टुकड़े की दोलन आवृत्ति निकालिये।

(0.79 से$^{-1}$)

अध्याय—5

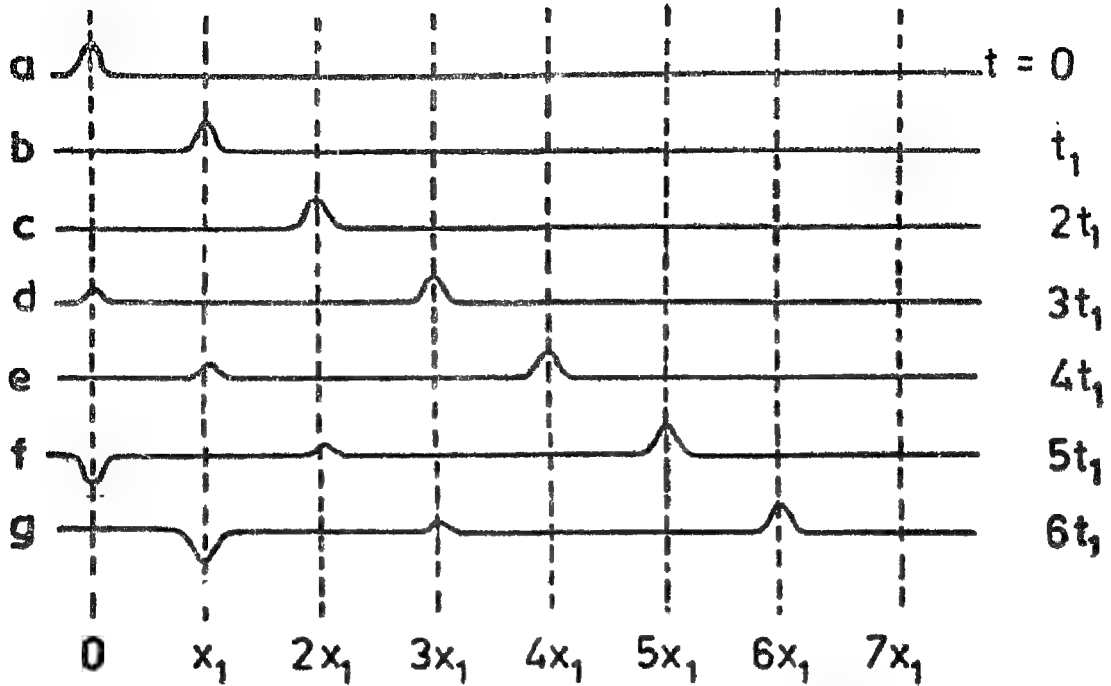
तरंग गति (*Wave Motion*)

इस अध्याय में हम तरंग-गति संबन्धी कुछ तथ्यों पर विचार करेंगे। तरंग-गति की एक मुख्य विशेषता यह होती है कि इसमें पदार्थ का नहीं अपितु ऊर्जा का स्थानान्तरण होता है। एक अन्य विशेषता यह भी है, कि माध्यम के सापेक्ष तरंग का माध्यम में वेग केवल माध्यम पर ही निर्भर करता है, स्रोत अथवा उसकी गति के प्रकार पर नहीं। हम इन पर तथा इनसे संबन्धित कुछ अन्य तथ्यों पर भी विचार करेंगे, जैसे तरंगों को गणितीय और ग्राफीय प्रकार से कैसे निरूपित करते है, और इनमें ऊर्जा का स्थानान्तरण कैसे होता है, इत्यादि।

5.1 जल में और डोरी में उत्पन्न तरंगें (Waves on Water and Strings)

जिसने समुद्र तट पर खड़े होकर लहरें (तरंगे) देखी हों, उसे उनके वर्णन की कोई आवश्यकता नहीं। बड़े सरोवरों में भी तरंगें देखी जा सकती हैं, हालाँकि वे समुद्र जितनी बड़ी नहीं होतीं। किसी परात में पानी भर कर यदि इसमें अंगुली डुबायें या कंकड़ फेंकें तो भी लहरें उत्पन्न हो जाती हैं (चित्र 5.1)। ये सब तरंगें पानी के तल पर बनती हैं। इन तरंगों में हम पायेंगें कि एकान्तर क्रम से शृंग (crest) और गर्त (trough) बनते हैं, जो तल पर आगे की ओर चलते हैं। श्रंगों और गर्तों के इस समुच्चय को 'तरंग' कहते हैं, और वह पदार्थ जिसमें होकर ये तरंगें चलती हैं (इस उदाहरण में पानी) "माध्यम" कहलाता है।

5.1 किसी कुंड में पानी के पृष्ठ पर तरंगें। समय गुजरने तथा गर्त पानी के पृष्ठ पर चलते हैं।

अब एक तनी हुई डोरी की कल्पना कीजिये। यदि इसके एक सिरे को एक तरफ थोड़ा-सा झटका दें, तो झटके हुए स्थान से आरम्भ होकर एक क्षोभ (disturbance) या स्पंद डोरी में होकर चलने लगता है इस प्रक्रिया में डोरी का प्रत्येक भाग क्रमबद्ध रूप से एक-एक करके अपनी साम्यावस्था से विचलित होता जाता है। चित्र (5.2) में डोरी में होकर चलते हुए क्षोभ की यात्रा की 0, t_1, $2t_1 \cdots 6t_1$, काल-बिन्दुओं के अनुसार क्रमिक अवस्थाएं a, b, c,$\cdots$g दिखाई गई हैं। क्षोभ डोरी में इसके बायें सिरे से आरम्भ करके

5.2 किसी रज्जु पर संचरित स्पंद a, b, c··· अनुक्रम से बाद के क्षणों की स्थिति दिखाते हैं।

प्रति काल अवधि t_1, में x_1, दूरी तै करता हुआ चलता है।

इस तरंग गति का हम तनिक और निकटता से अध्ययन करेंगे। पहली बात इसमें हम पायेंगे कि डोरी का कोई भाग स्वयं क्षोभ के साथ नहीं चलता, अर्थात्, पदार्थ का स्थानान्तरण इसमें नहीं होता। डोरी के एक छोर पर दी गई सूचना (इस उदाहरण में स्पंद) ही डोरी में होकर चलती है। यही बात जल के तल पर बनी तरंगों के लिए भी सही है। इसलिए तरंग-गति की एक मुख्य विशेषता यह हुई कि **तरंग-संचरण में पदार्थ का स्थानान्तरण नहीं होता है।**

किसी माध्यम में तरंग जिस वेग से चलती है। उसे तरंग-वेग (wave velocity) कहते हैं। हम इसे c से निरूपित करेंगे। यह एक तथ्य है कि एक ही माध्यम में चलती हुई सभी तरंगें, चाहे वह किसी प्रकार भी उत्पन्न की गई हों या कैसा भी उनका रूप हो, समान वेग से चलती हैं। इस तथ्य को चित्र (5.2) में समझाया गया है। जैसे, (चित्र 5.2) $t=0$ पर आरम्भ हुआ स्पंद प्रति काल-अवधि t_1 में x_1 दूरी तै करता है, इसलिए इसका वेग (x_1/t_1) हुआ। चित्र (5.2) में ही $3t_1$ काल-बिन्दु पर एक दूसरा स्पंद आरम्भ होता दिखाया है। यह स्पंद क्षीण है, किन्तु यह भी t_1 काल में x_1 दूरी तै करता है। एक तीसरा स्पंद जो $5t_1$ पर आरम्भ होता है और जिसका आकार भिन्न है, वह भी उसी से चलता हुआ दिखाया गया है। जैसा डोरी में चलते स्पंद के लिए दिखाया है, वैसे ही जल के तल पर स्पंद-संचरण या किसी भी माध्यम में तरंग-संचरण के लिये सही है। इसीलिये, तरंग-गति की दूसरी विशेषता यह हुई, कि **किसी माध्यम में माध्यम के सापेक्ष तरंग-वेग उस माध्यम की प्रकृति पर ही निर्भर करता है,** क्षोभ (तरंग) के स्रोत, अर्थात् क्षोभ के आकार-प्रकार पर नहीं। बहुत गहराई में जायें तो, वास्तव में तरंग-वेग तरंग के आकार-प्रकार पर निर्भर करता है, परन्तु उतनी सूक्ष्मता में हम यहाँ नहीं जायेंगे। यदि स्रोत माध्यम में, माध्यम के सापेक्ष, गतिशील हों, जैसे उड़ता हुआ वायुयान, तो भी तरंग

का माध्यम के सापेक्ष वेग अपरिवर्तित रहता है। इसके अर्थ यह हुए, कि यदि स्रोत का माध्यम के सापेक्ष वेग V है, तो तरंग का माध्यम के सापेक्ष वेग c तो सभी दिशाओं में वही रहेगा, परन्तु स्रोत के सापेक्ष तरंग वेग स्रोत की दिशा में c—V और स्रोत से दूर की दिशा में c+V हो जायेगा। तरंग-गति के विपरीत कण-गति मे बात दूसरी होती है। जैसे, यदि वायुयान में से किसी बन्दूक से c′ वेग से गोली छोड़ी जाये, तो वायु के सापेक्ष गोली का आगे की दिशा में वेग c′+V और पीछे की ओर c′-V होगा, जबकि स्रोत (वन्दूक) के सापेक्ष गोली का प्रत्येक दिशा में वेग c′ ही रहेगा।

5.2 ध्वनि-तरंगें (Sound Waves)

माना कि हम कोई सितार-वादन सुन रहे हैं। सितार-वादक तारों को छेड़ रहा है, जिससे सितार के तारों में कम्पन हो रहे हैं, वायु के माध्यम से होकर ये कम्पन चारों ओर फैल रहे हैं और जब ये हमारे कान में आकर कान के पर्दे से टकराते हैं तो हमारा मस्तिष्क उन्हें ग्रहण करता है। इस पूरी प्रक्रिया को सुनना कहते हैं। वायु सितार से चलकर हमारे कान तक नहीं आई, केवल कंपन (सूचना) ही वायु में होकर कानों तक प्रसारित हुए हैं। इस प्रसारण का वेग केवल माध्यम (इस उदाहरण में वायु) पर ही निर्भर करता है, और इस बात पर निर्भर नहीं करता कि ध्वनि तेज है या धीमी, मन्द है या तीखी, संगीत है या भाषण[1]।

सामान्यत: वायु में तरंग-वेग का मान ~ 350 मी से$^{-1}$ अर्थात् ~ 1200 किमी घण्टा$^{-1}$ है। यही कारण है कि किसी हमारी ओर आती हुई कार के हॉर्न की आवाज हम तक कार की अपेक्षा बहुत जल्दी आ ज़ाती है। पृथ्वी में चलती हुई तरंग का वेग इसका लगभग 10 गुना है। हवा की रफ्तार की तुलना में यह बहुत अधिक है, हवा में ~ 50 किमी घण्टा$^{-1}$ की रफ्तार काफी तेज मानी जाती है।

अनुदैर्ध्य और अनुप्रस्थ तरंगें (Longitudinal and Transverse Waves)

जल की सतह पर (और डोरी में) चलने वाली तरंगों तथा वायु में चलने वाली तरंगों में एक अर्थ में भिन्नता होती है। यदि हम तरंगों को वायु (या किसी गैस) में किसी दिशा —X की ओर प्रसारित करना चाहें तो स्रोत के कम्पन भी हमें उसी दिशा —X में ही कराने पड़ेंगे। कम्पन करते हुए वायु के अणुओ को तो हम नही देख सकते, किन्तु स्रोत (जैसे तबले की पुड़ी) के कम्पनों, या ग्राहक (जैसे लाउड-स्पीकर की झिल्ली) के कम्पनों को हम सुग्राही यंत्रों की सहायता से देख सकते हैं, और उन्हें देखकर हमारा निष्कर्ष यह होगा कि वायु के अणुओं के कम्पन तरंग-संचरण की दिशा में ही होने चाहिए। इसलिये वायु में बनने वाली तरंगें अनुदैर्ध्य तरंगें कहलाती हैं। इसके विपरीत, क्योंकि डोरी में बनने वाली तरंगों में कणों की अपनी साम्यावस्था के गिर्द गति तरंग-गति की दिशा के लम्बवत् (अनुप्रस्थ) होती है, इसलिए इन तरंगों को अनुप्रस्थ तरंग कहते हैं। अनुदैर्ध्य तरंगें द्रवों में भी होकर संचारित की जा सकती हैं। लम्बी स्प्रिंग में दोनों प्रकार की तरंगें-अनुदैर्ध्य और अनुप्रस्थ उत्पन्न की जा सकती हैं। लम्बाई में दबाकर छोड़ दें तो अनुदैर्ध्य और एक ओर को झटक कर छोड़ दें तो अनुप्रस्थ तरंगें उत्पन्न होंगी (चित्र 5.3)। किसी ठोस छड़ में भी ऐसा सम्भव है।

साधारणत:, गैसों और द्रवों में होकर केवल अनुदैर्ध्य तरंगों का ही संचारण हो सकता है। इन पदार्थों में दृढ़ता नहीं होती केवल आयतन प्रत्यास्थता होती है, इसलिए दाब और विरलता, अर्थात् दाब के परिवर्तन, ही इनमें होकर चल सकते हैं। अनुदैर्ध्य तरंगों को इसलिए **दाब तरंगें** भी कहते हैं।

इससे भिन्न, ठोसों में दृढ़ता और आयतन प्रत्यास्थता दोनों ही होती हैं, इसलिये इनमें होकर दोनों प्रकार की तरंगें, दाब (compression) से उत्पन्न

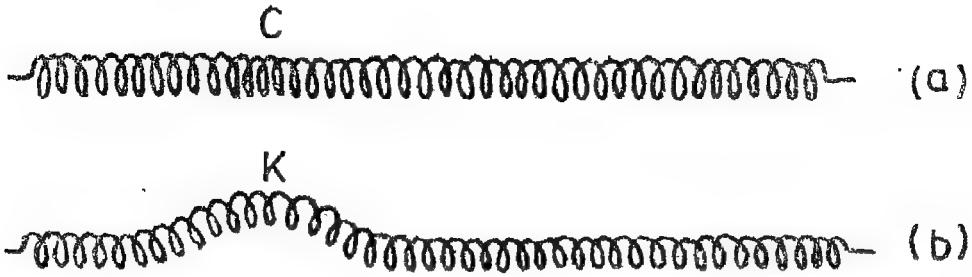
---

1. वस्तुत:, तरंग-आवृत्ति के बहुत अधिक होने पर वेग आवृत्ति पर भी कुछ-कुछ निर्भर करता है। इसे (Dispersion) कहते हैं। किन्तु प्रस्तुत प्रसंग में इसका विचार करना आवश्यक नहीं।

C

(a)

K

(b)

5. 3 किसी स्लिकी (slinky) में अनुदैर्ध्य तथा अनुप्रस्थ दोनों प्रकार की तरंगें संचरित हो सकती है। (a) संपदन C, (b) निकंच k

अनुदैर्ध्य और विकृति (distortion) से उत्पन्न अनुप्रस्थ, संचारित हो सकती हैं। दोनों प्रकार की तरंगों के वेग समान नहीं होते और सामान्यतः अनुदैर्ध्य तरंगें अधिक तीव्रगामी होती हैं।

तनी हुई डोरी में कुछ अन्य कारण भी विचारणीय हैं। डोरी स्वयं बहुत मुलायम होती है, अर्थात्, इसकी दृढ़ता नगण्य है, और इसलिए इसमें तरंग-संचरण के लिए तनाव आवश्यक होता है। अतः इसमें तरंग-वेग का मान केवल डोरी के पदार्थ पर ही निर्भर नहीं करता, अपितु एक बाह्य कारक-तनाव भी इसमें आता है। तनाव को कम या अधिक हम स्वयं कर सकते हैं। सितार के तार या तबले की पुड़ी में तनाव को आवश्यकतानुसार घटाया-बढ़ाया जा सकता है संगीतज्ञ इन वाद्य-यंत्रों को मिलाने के लिये यही करते हैं, जबकि हारमोनियम या बासुरी में ऐसा कुछ नहीं होता।

विद्युत-चुम्बकीय तरंगें (Electromagnetic Waves)

अब तक जिन तरंगों पर हमने विचार किया है वे किसी माध्यम में होकर चलती हैं। उन सबको हम यांत्रिक तरंगें या प्रत्यास्था तरंगें कह सकते हैं। इनसे बिल्कुल भिन्न एक और प्रकार की तरंगें होती हैं जो निर्वात् या शून्य आकाश में होकर चल सकती हैं, अर्थात् उनके संचरण के लिये माध्यम की कतई आवश्यकता नहीं। ये विद्युत-चुम्बकीय तरंगें होती हैं। इन्हें विद्युत-चुम्बकीय इसलिए कहते है, क्योंकि वैद्युतिक प्रभाव और चुम्बकीय प्रभाव पृथक-पृथक शून्य में संचारित हो सकते हैं, और उन तरंगों में वे दोनों प्रभाव परस्पर सम्बद्ध होकर चलते हैं। रेडियो तरंगें, माइक्रो-तरंगें, प्रकाश-तरंगें, X- किरणें और गामा-किरणें ये सभी विद्युत-चुम्बकीय तरंगें हैं। ये तरंगें अनुप्रस्थ प्रकार की होती हैं, अर्थात्, इनमें विद्युत और चुम्बकीय क्षेत्रों के परिवर्तन तरंग-संचरण की दिशा के लम्बवत् होते है।

5.3 भिन्न-भिन्न तरंगों के वेग (Velocity of different waves)

तनी हुई डोरी में अनुप्रस्थ तरंगों के वेग के लिए समीकरण है :

$$c = \sqrt{T/m} \tag{5.1}$$

इसमें T डोरी पर खिचाव (न्यूटन) है, और m डोरी की प्रति इकाई लम्बाई संहति (किग्रामी$^{-1}$) है। विमीय जाँच से भी हम देख सकते हैं कि $\sqrt{\frac{T}{m}}$ की विमाएँ वेग की हैं। मोटे तौर पर, किसी डोरी में स्पंद चला कर उसके वेग की तनाव T पर और m पर निर्भरता की परीक्षा हम स्वयं करके देख सकते हैं।

गैस, द्रव या ठोस किसी भी माध्यम में अनुदैर्ध्य तरंगों के वेग के लिए व्यंजक है :

$$c = \sqrt{\frac{E}{d}} \quad (5.2)$$

इसमें E माध्यम की आयतन प्रत्यास्थता (न्यूटन मी$^{-2}$) और d उसका घनत्व (कि ग्रा मी$^{-3}$) है। यद्यपि ठोसों का घनत्व गैसों की तुलना मे बहुत अधिक होता है, किन्तु उनकी प्रत्यास्थता अपेक्षाकृत और भी इतनी अधिक होती है कि ठोसों में तरंग-वेग गैसों की अपेक्षा अधिक रहता है।

गैस की आयतन प्रत्यास्थता उसके संपीडन के समतापीय या रूद्धोष्म होने पर निर्भर करती है। समतापीय संपीडन में E का मान उस पर दाब P के मान के बराबर होता है, रूद्धोष्म प्रक्रिया में E का मान γP के बराबर होता है। γ गैस की स्थिर दाब पर आपेक्षिक ऊष्मा और स्थिर आयतन पर आपेक्षिक ऊष्मा का अनुपात है। न्यूटन ने समीकरण (5.2) को व्युत्पन्न किया था, और उन्होंने E=P रखकर इस समीकरण को इस प्रकार लिखा था :

$$c = \sqrt{\frac{E}{d}} \quad (5.3)$$

परन्तु लाप्लास ने विचारा कि, क्योंकि, दोलन इतने शीघ्र होते हैं कि संपीडन में उत्पन्न हुई और विरलन में व्यय हुई ऊष्मा का स्थानान्तरण नहीं हो पाता, इसलिए होने वाले परिवर्तन रूद्धोष्म होते हैं, और समीकरण (5.2) में $E=\gamma P$ लिखा जाना चाहिए, अर्थात्,

$$c = \sqrt{\frac{\gamma P}{d}} \quad (5.4)$$

किसी गैस के लिए दिये ताप पर $\frac{P}{d}$ का मान अचर होता है। अतः तरंग-वेग का मान दाब पर निर्भर नहीं करता। ताप के अनुसार वेग में परिवर्तन निम्नलिखित प्रकार से होता है। क्योंकि

$$P = P_o\,(1+\alpha\theta)\,;\ \alpha = \frac{1}{273} \quad (5.5)$$

जहाँ θ सेलसियस अंशों में ताप है। इसलिए, समीकरण (5.4) में P का यह मान रखने और द्विपद-प्रमेय का प्रयोग करने पर (जिसमें $\alpha\theta \ll 1$ है) हमें लब्ध होगा,

$$c = c_o\,(1+\tfrac{1}{2}\alpha\theta) \quad (5.6)$$

उदाहरण 5.1

मानक ताप और दाब पर वायु का घनत्व 0.00129 ग्रा से मी$^{-3}$ है। (i) न्यूटन का, तथा (ii) लाप्लास का सूत्र लगा कर अनुदैर्ध्य तरंगों का वेग ज्ञात कीजिए।

$$P_o = 76 \times 13.6 \times 980 \times 10^{-1} \frac{\text{न्यूटन}}{\text{मी}^2}$$

$$\left(= \frac{\text{किग्रा मीसे}^{-2}}{\text{मी}^2}\right)$$

$$d_o = 1.29 \text{ कि ग्रा मी}^{-3}$$

न्यूटन के सूत्रानुसार

$$c = \sqrt{\frac{76 \times 13.6 \times 980 \times 10^{-1}}{1.29}} \left(\frac{\text{किग्रा मीसे}^{-2}}{\text{कि ग्रा मी}^{-3}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= 280 \text{ मी से}^{-1}$$

लाप्लास के सूत्रानुसार, क्योंकि, वायु के लिए $\gamma = 1.4$, अतः,

$$c = \sqrt{1.4} \times 280 \text{ मी से}^{-1}$$

$$= 330 \text{ मी से}^{-1}$$

उदाहरण 5.2

इस्पात के लिए $E = 2.9 \times 10^{11}$ न्यूटन मी$^{-2}$ और $d = 8 \times 10^3$ कि ग्रा मी$^{-3}$ अनुदैर्ध्य तरंगों के लिए वेग ज्ञात कीजिए।

$$c = \sqrt{E/d} = \sqrt{\frac{2.9 \times 10^{11}}{8 \times 10^3}}$$

$$c = 6 \times 10^3 \text{ मी से}^{-1}$$

5.4 सरल आवर्त तरंगें (Simple Harmonic Waves)

माना कि एक तरंग X-अक्ष पर c वेग से संचरित हो रही है। इसके अर्थ यह हुए, कि अक्ष-केन्द्र पर जो काल-बिन्दु t पर घटित हुआ वह x स्थिति पर (t+x/c) काल पर घटित होगा, अथवा t काल पर x स्थिति में जो घटित हो रहा है वह अक्ष-केन्द्र पर

$(t - x/c)$ काल-बिन्दु पर घट चुका होगा। इस दूसरी उक्ति को हम गणितीय रूप में इस प्रकार व्यक्त कर सकते हैं :

$$\xi(x,t) = \xi(0, t - x/c) \quad (5.7)$$

यदि अक्ष-केन्द्र पर विचलन के लिए समीकरण

$$\xi(0, t) = A \cos 2\pi \frac{t}{T} \quad (5.8)$$

हो, तो $\xi(x, t)$ के लिए समीकरण होगी

$$\xi(x, t) = A \cos \frac{2\pi}{T}\left(t - x/c\right) \quad (5.9)$$

यह x-अक्ष पर धनात्मक दिशा में संचरित सरल आवर्त तरंग की समीकरण है। इससे किसी स्थान x और काल t पर विचलन का मान प्राप्त होगा। इसे देखने पर ज्ञात होगा, कि किसी दिये हुए स्थान (स्थिर x) पर पतन $\xi(x, t)$ का मान T काल के अन्तर से पुनरावर्तित होता है। और यह भी, कि किसी दिये हुए काल (स्थिर t) पर यह फलन cT दूरी के अन्तर से पुनरावर्तित होता है। इस दूरी को तरंग-दैर्घ्य λ कहते हैं। हम समीकरण (5.9) को इस प्रकार भी लिख सकते हैं :

$$\xi = A \cos 2\pi \left(t/T - \frac{x}{\lambda}\right) \quad (5.10)$$

सुविधा के लिए बाईं ओर का पद केवल ξ ही लिखते हैं, यद्यपि यह आशय इसमें निहित है, कि यह x और t का फलन है। यह फलन काल में (T अवधि) और आकाश में (λ अन्तराल) पुनरावर्ती है।

समीकरण (5.10) से हम किसी भी स्थान x और काल t पर कण का वेग $\dot{\xi}$ (जो तरंग-वेग c से भिन्न है) निकाल सकते हैं। यह होगा,

$$\dot{\xi} = \frac{d\xi}{dt}$$

$$= - v_o \sin 2\pi \left(t/T - \frac{x}{\lambda}\right) \quad (5.11)$$

जहाँ,

$$v_o = \frac{2\pi}{T} A$$

यह दृष्टव्य है कि किसी माध्यम में कण का वेग चर राशि है, जबकि तरंग-वेग c अचर है। परिवर्तन उसी प्रकार का है जैसा कि विचलन का, और वेग-आयाम v_o का मान विचलन-आयाम A का $\frac{2\pi}{T}$ गुना है।

उदाहरण 5.3

तरंग $\xi = 2.2\cos(300t - 0.24x)$ पर विचार कीजिये। यदि ξ, t तथा x के मात्रक क्रमशः मिमी; सेकिंड तथा मीटर हैं तो (1) आयाम, (2) आवृत्ति, (3) तरंग वेग तथा कण वेग का आयाम निकालिए।

हल

(1) चूँकि कोटिज्या (cosine) संख्यामात्र है, 2.2 का मात्रक वही है जो ξ का है। अतः आयाम = 2.2 मिमी।

(2) समीकरण (5.10) के साथ तुलना करने से $\frac{2\pi}{T} = 300$ (सेकिंड)$^{-1}$

अतः आवृत्ति $\nu = \frac{1}{T}$

= 48 हर्त्स (H_z)

(3) तरंग वेग $c = \frac{\lambda}{T} = \frac{2\pi/T}{2\pi/\lambda}$

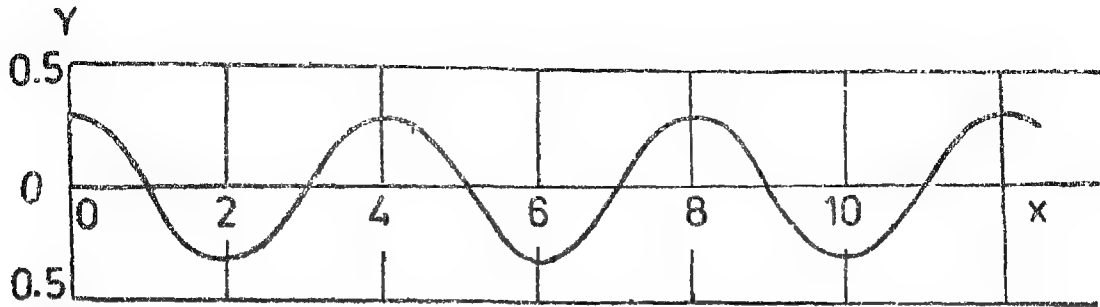
$= \frac{300\,(\text{से})^{-1}}{0.24\,(\text{मी})^{-1}} = 1250$ मी से$^{-1}$

(4) कण वेग का आयाम $= \frac{2\pi}{T} A$

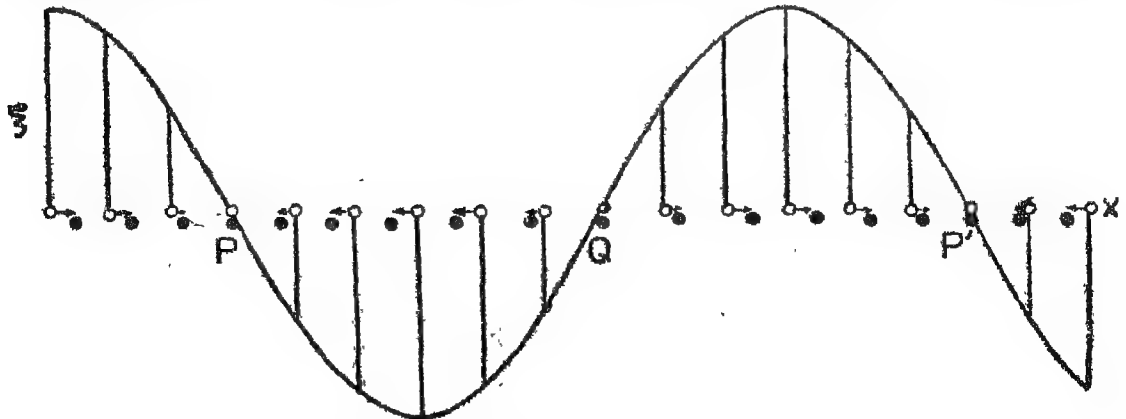
$= 300 \times 2.2$ मि मी/से

$= 0.66$ मी से$^{-1}$

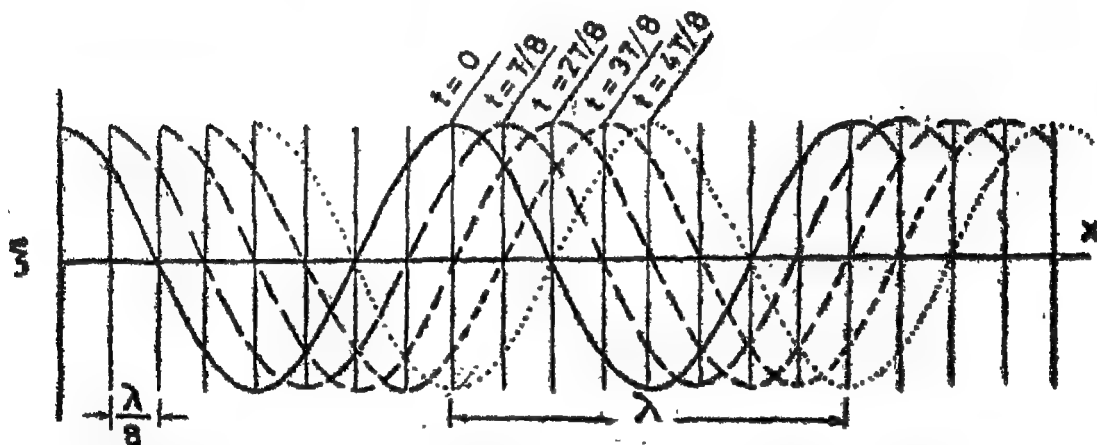
5.5 तरंग गति का आलेखी निरूपण (Graphical Representation of Wave Motion)

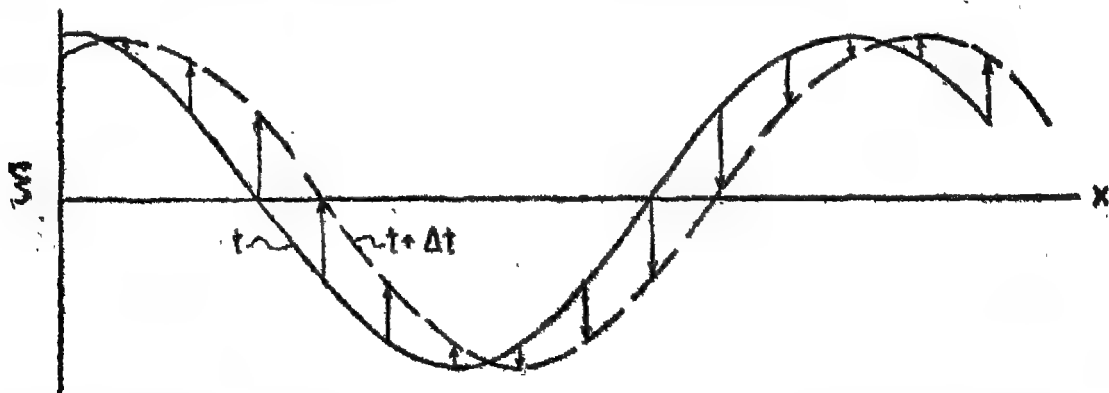
किसी सीधी रेखा में तरंग गमन में तीन प्राचल शामिल होते हैं, कण की स्थिति x, काल t तथा कण का विस्थापन ξ। द्विविम आलेख में (किसी निश्चित स्थान पर x पर) ξ तथा t का ग्राफ अथवा (किसी निश्चित क्षण t पर) ξ तथा x का ग्राफ खींचा जा सकता है। चित्र (5.4) में किसी प्रसंगवादी तरंग के लिए किसी क्षण t पर ग्राफ खांचा गया है। यह

5.4 किसी क्षण पर किसी तरंग के लिए (ξ, x) ग्राफ। पैमाना X-अक्ष; 1 अंश = 2 मी, Y-अक्ष, 1 अंश = 0·5 मिमी यह द्रष्टव्य है कि यद्यपि ξ तथा x दोनों लम्बाइयाँ हैं उनलिए दिए गये पैमाने बहुत भिन्न भिन्न हैं।

द्रष्टव्य है कि x तथा ξ के लिए पैमाना भिन्न-भिन्न है। समान्यतः ध्वनि तरंग में विस्थापन का आयाम मिलीमीटर का छोटा अंश होता है जब कि x का विस्तार कई मीटर का होता है। एक ग्राफ में (फोटोग्राफ के विरुद्ध) अलग-अलग सुविधापूर्ण पैमाने चुने जाते हैं।

आलेखी निरूपण की एक अन्य बात यह है कि इसका उपयोग अनुप्रस्थ तथा अनुदैर्ध्य दोनों प्रकार की तरंगों के निरूपण के लिए किया जा सकता है। अनुदैर्ध्य तरंगों में विस्थापन ξ तरंग गमन की दिशा के समानान्तर होता है, अर्थात् X-दिशा में होता है। तथापि ग्राफ ξ को X दिशा के अभिलम्ब दिशा में दिखाया जाता है। परम्परा यह है कि यदि विस्थापन दाहिनी ओर हो तो इसे +Y में दिखाया जाता है और यदि विस्थापन बायीं ओर हो तो —Y दिशा में दिखाया जाता है। चित्र (5.5) में प्रथम पंक्ति में रिक्त वृत्त किसी माध्यम में समान्तराली कणों की शृंखला की माध्य स्थिति दिखलाते है। (अभिवर्धित) तीरों से किसी क्षण पर अनुदैर्ध्य विस्थापन निरूपित किया गया है। स्पष्टतः सभी तीर न तो एक दूसरे के बराबर हैं और न एक ही दिशा मे हैं। दूसरी पंक्ति में भरे वृत्त तीरों के शीर्षों की संगती तात्क्षणिक कण-स्थिति को दिखाते हैं। अब प्रत्येक दाहिनी दिशा के तीर के लिए समानुपाती रेखा ऊपर की ओर और प्रत्येक बायीं दिशा के तीर के लिए समानुपाती रेखा नीचे की ओर हम खींचते हैं। इन रेखाओं के शीर्षों से गुजरता हुआ एक निष्कोण वक्र खींचा जाता है। यही किसी क्षण t पर माध्यम में अनुदैर्ध्य तरंग का निरूपण है। यदि ठोस बिन्दुओं

5.5 किसी अनुदैर्ध्य तरंग का ग्राफ द्वारा निरूपण।

को देखें तो हमारे ध्यान में यह बात आयेगी कि P, P′ स्थानों पर कण इकट्ठे हो गये हैं तथा Q स्थान के आस-पास वे सामान्य से अधिक दूरी पर हो गये हैं। अतः अधिकतम धनत्व इस कारण अधिकतम दाब तथा न्यूनतम धनत्व के स्थान एकान्तर पर स्थित हैं। अनुदैर्ध्य तरंगों में एकान्तरी अधिकतम तथा न्यूनतम दाब का संचरण होता है।

उत्तरोत्तर क्षणों पर ξ, x वक्रों की श्रेणी खींचकर तरंग का प्रगामी पहलू दिखाया जा सकता है। 0, T/8, 2T/8, 3T/8,...आदि क्षणों के लिए ऐसा चित्र (5.6) में किया गया है। अब हम कल्पना कर सकते हैं कि समय के साथ शीर्ष तथा गर्त किस प्रकार आगे बढ़ते हैं। समय के T/8 अंतराल में वे X दिशा में λ/8 दूरी चलते हैं।

5.6 कोई संचरित तरंग। (ξ, x) के ग्राफ को कई बार T/8 के अंतराल पर दिखाया गया है। तरंग का स्वरूप निरंतर बदलता है। परन्तु x की प्रत्येक स्थिति के लिए कण अपनी साम्य स्थिति के दोनों ओर दोलन करते हैं।

चित्र (5.7) में समय के △t लघु अंतराल पर ξ, x के दो वक्र खींचे गये हैं। यह देखा जा सकता है कि इस अंतराल में विस्थापन के परिवर्तन △ξ किस प्रकार x के साथ बदलते हैं।

5.7 इसमें दिखाया गया है कि △t काल अंतराल पर खींचे गये दो वक्रों द्वारा किस प्रकार (ξ, x) के परिवर्तन की कल्पना की जा सकती है। ऊर्ध्वाधर तीरों से △t काल में △ξ परिवर्तन दिखाया गया है और इस तरह प्रत्येक x के लिए उस दिये क्षण पर वे कण वेग के अनुपात में है।

5.6 कला एवं कलान्तर (Phase and Phase Difference)

किसी भी आवर्ती गमन में $\xi, \dot{\xi}, \ddot{\xi}$ राशियाँ परिवर्तन के चक्र में बारम्बार इस तरह बदलती हैं कि $t+T$, $t+2T$, ---$t+nT$ क्षणों पर उनकी अवस्था वही होती है जो t क्षण पर होती है। चक्र की विभिन्न अवस्थाओं को चतुर्थ-चक्र, अर्ध-चक्र, त्रिचतुर्थ-चक्र आदि की भाषा में बताया जा सकता है जिन्हें किसी चुनी हुई अवस्था से नापा गया हो। किन्तु एक अधिक उपयोगी विधि यह है कि अवस्था को 'कला कोण' से निर्दिष्ट किया जाय। धन X दिशा में गमन करती हुई किसी प्रसंवादी तरंग को समीकरण द्वारा निरूपित किया जा सकता है।

$$\xi = A\cos\left[2\pi\left(t/T - \frac{x}{\lambda} + \phi_0\right)\right] \quad (5.12)$$

कोटिज्या के कोणांक को 'कला कोण' अथवा केवल 'कला' ϕ कहते हैं। अतः समीकरण (5.12) में निरूपित तरंग की, x स्थिति तथा t क्षण पर कला है :

$$\phi = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} + \phi_0\right) \quad (5.13)$$

काल t तथा अन्तराल x दोनों के साथ कला का परिवर्तन होता है। काल के साथ इसका परिवर्तन

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{T}\Delta t = 2\pi\nu\Delta t \quad (5.14)$$

के अनुसार होता है और स्थिति x के साथ इसका परिवर्तन

$$\Delta\phi = -\frac{2\pi}{\lambda}\Delta x \quad (5.15)$$

के अनुसार होता है। दूसरे समीकरण में ऋण चिह्न पर ध्यान रखना चाहिए। इसका अर्थ है कि +X दिशा में चलने वाली तरंग के लिए आगे के बिन्दु कला में पीछे हैं, अर्थात् वे कम्पन की उत्तरोत्तर अवस्थाओं में बाद को आते हैं।

कला का उपयोग λ एवं T की परिभाषा करने के लिए किया जा सकता है। λ उन दो बिन्दुओं के बीच की दूरी है जिनकी कलाओं का अन्तर 2π है। इसी तरह T वह समय है जिसमें किसी निश्चित बिन्दु पर कला में परिवर्तन 2π के बराबर होता है। बहुधा जब कम्पनों की कलाओं का अन्तर 2π के पूर्णांक गुणज के बराबर होता है तब कहा जाता है कि वे 'एक ही कला में हैं' तथा कहा जाता है कि वे बिन्दु जिनकी कलाओं का अन्तर π का विषम गुणज होता है 'विपरीत कलाओं में' हैं। यह सुविधापूर्ण तथा सार्थक भाषा है परन्तु इसमें मध्यवर्ती अवस्थाओं के क्रम के विषय में कुछ नहीं कहा जाता।

उदाहरण 5.4

समतल तरंग ξ

$$= 2.5\, e^{-0.02x}\cos\left(800t - 0.82x + \frac{\pi}{2}\right)$$

के लिए (1) कला ϕ का व्यापक व्यंजक, (2) $x=0$ तथा $t=0$ पर कला, (3) उन बिन्दुओं के बीच कला का अन्तर जिनकी X-दिशा में दूरी 20 से मी है, (4) किसी बिन्दु पर 0·6 मिली सेकिंड में कला में परिवर्तन तथा (5) x, 100 मीटर पर आयाम का मान निकालिये। (ξ, t तथा x के मात्रक क्रमशः 10^{-5} से मी; सेकिंड तथा मीटर मानिये।)

हल

(1) $\phi = 800t - 0.82x + \pi/2$। इस पर इस बात का कोई प्रभाव नहीं पड़ता कि x के बढ़ने के साथ आयाम घट रहा है।

(2) स्पष्टतः $\phi_0 = \pi/2$

(3) $\Delta\phi = -0.82x = -0.82 \times 0.20$
$= -0.164$ रेडियन।

(4) $\Delta\phi = 800t = 800 \times 0.6 \times 10^{-3}$
$= 0.48$ रेडियन।

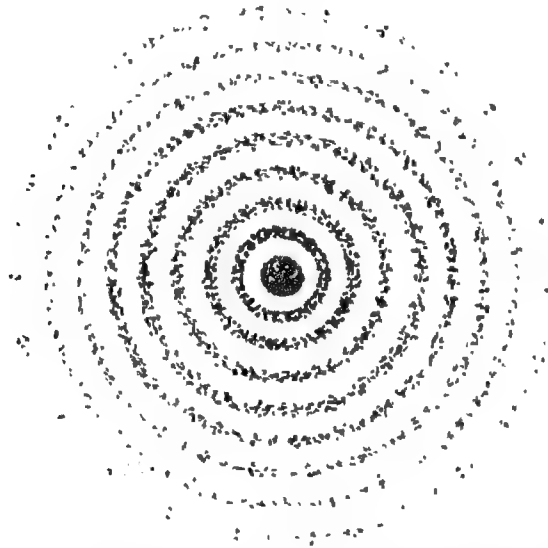
(5) x पर आयाम $= 2.5 \times e^{-0.02x} \times 10^{-5}$ सेमी जिसमें x मीटरों में है। x = 100 मीटर पर आयाम $A_{100} = 2.5e^{-2} \times 10^{-5}$ सेमी
$= 3.4 \times 10^{-6}$ सेमी

5.7 तरंगाग्र (Wavefronts)

यदि हम अपनी अंगुली को पानी में बार बार

डुबाएँ तो शीर्षों तथा गर्तों की एक श्रेणी फैलेगी। किसी विशेष क्षण पर प्रत्येक शीर्ष और प्रत्येक गर्त का स्वरूप वृत्ताकार होता है। यदि तरंग को कोटिज्या फलन से निरूपित किया जाय तथा ऊपर की ओर के विस्थापन को धन माना जाय तो किसी शीर्ष के लिए $\phi = n.2\pi$, (n पूर्णांक) तथा किसी गर्त के लिए $\phi = (m + \frac{1}{2})\ 2\pi$, m पूर्णांक। दूसरे शब्दों में शीर्ष $(n)2\pi$ अचर कला वाले बिन्दुओं का रेखापथ है तथा कोई गर्त $(m + \frac{1}{2})\ 2\pi$ अचर कला वाले बिन्दुओं का रेखापथ है। उन **बिन्दुओं का रेखापथ जो एक ही कला में होते हैं तरंगाग्र कहलाता है।** पानी में किसी बिन्दु स्रोत से तरंगाग्रों का स्वरूप वृत्ताकार होता है। वायु में किसी बिन्दुस्रोत से निकली तरंगों के तरंगाग्र समतल होता है।

यह देखा जा सकता है कि पानी के बिन्दुस्रोत से निकली तरंगो के शीर्ष की ऊँचाई अर्द्धव्यास r के बढने के साथ-साथ कम होती जाती है। इसका कारण यह है कि r के बढ़ने के साथ-साथ उतनी ही ऊर्जा बड़े तरंगाग्रों में फैलती जाती है। इसी प्रकार अंतरिक्ष में तरंगों के लिए उतनी ही ऊर्जा उत्तरोत्तर बढ़ते गोलीय तरंगाग्रों में फैलती है और आयाम घटता जाता है[1]।

समीकरण (5.10) अथवा समीकरण (5.12) समतल तरंगो के लिए है जिससे हम ऐसी तरंग समझते है जिसका तरंगाग्र समतल हो। इन तरंगों में किसी क्षण पर कला केवल x पर निर्भर करती है (यदि x अक्ष को तरंग के गमन की दिशा में चुना गया है)

5.8 जितना ही हम स्रोत से दूर जाते हैं तरंगें क्षीण होती जाती हैं।

का स्वरूप गोलीय होता है। यदि हम किसी लम्बे सीधे छड़ को पानी में बार-बार डुबोयें तो थोड़ी दूरी पर तरंगाग्र सीधी रेखाओं के रूप में होंगे। किसी भी स्रोत से निकली तरंगों का स्वरूप बड़ी दूरियों पर और तरंगाग्र YZ समतल के समान्तर होते हैं। इस स्थिति में यदि (x_1, y_1, z_1) तथा (x_2, y_2, z_2) दो बिन्दु हैं तो उनकी कलाओं का अन्तर केवल $(x_1 - x_2)$ पर निर्भर करता है और $(2\pi/\lambda)x\ (x_1 - x_2)$ के तुल्य होता है।

1. पृष्ठीय तरंगों के लिए तरंगाग्र की लम्बाई r के अनुपात में होती। अंतरिक्ष तरंगों के लिए तरंगाग्र का क्षेत्रफल r^2 के अनुपात में होता है। इन तथ्यों से यह देखा जा सकता है कि दोनों अवस्थाओं में आयाम क्रमशः $1/\sqrt{r}$ तथा $1/r$ के अनुपात में होता है।

5.8 तरंगों में ऊर्जा-संचरण (Energy Transmission in Waves)

जहाँ कही भी दोलन होता है वहाँ दोलन ऊर्जा-होती है जो स्थितिज और गतिज स्वरूपों में परिवर्तित होती रहती है। समीकरण (5.10) द्वारा व्यक्त किसी प्रगामी तरंग में दोलन c वेग के साथ संचारित होते हैं। अतः ऊर्जा का भी संचरण होता है। यदि किसी माध्यम का घनत्व ρ है और कण वेग का आयाम v_o है तो प्रति इकाई आयतन की ऊर्जा

$$u = \frac{1}{2} \rho v_0^2 \qquad (5.16)$$

होगी। प्रति इकाई क्षेत्र में ऊर्जा का प्रति सेकिंड संचरण, जिसे तीव्रता कहते है, इसका c गुना है :

$$I = \frac{1}{2} \rho c v_0^2 \qquad (5.17)$$

यदि विस्थापन का आयाम A है और आवृत्ति ν है तो

$$v_0 = 2\pi\nu A \qquad (5.18)$$

अतः u और I दोनों (आयाम)^2 के तथा (आवृत्ति)^2 के अनुपात में होते है।

उदाहरण 5.5

5 वाट का एक स्रोत वायु में 1000से$^{-1}$ आवृत्ति की तरंगें उत्पन्न करता है। गोलीय वितरण को मान कर 100 मीटर दूरी पर तीव्रता का परिकलन कीजिये। यदि c=350 मी से$^{-1}$ तथा ρ=1.3 किग्रा/मी^{3} तो विस्थापन के आयाम को निकालिए।

हल :

100 मीटर पर तीव्रता

$$I = \frac{5 \text{ वाट}}{4\pi(100)^2 \text{मी}^2} = 4 \times 10^{-5} \text{ वाट मी}^{-2}$$

समीकरण (5.17) तथा समीकरण (5.18) से

$$I = 2\pi^2\nu^2A^2\rho c$$
$$= 2\pi^2 (1000)^2 A (1.3) (350)$$

I के दोनों मानों की तुल्यता करके तथा A के लिए हल करने से

$$A = 0.7 \times 10^{-7} \text{ मी}$$

(वायु मे ध्वनि तरगो के लिए विस्थापन आयाम के बहुत ही न्यून परिमाण पर ध्यान दीजिए।)

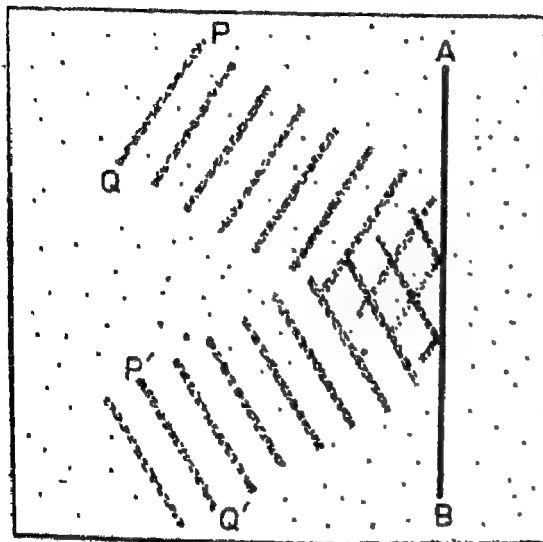
5.9 ध्वनि तरंगों का परावर्तन (Reflection of Sound Waves)

ध्वनि के परावर्तन का सबसे आम उदाहरण प्रतिध्वनि है जो बड़े कमरों तथा पहाड़ियों के आस-पास सुनाई पडती हैं। परन्तु पानी के किसी कुंड में उर्मिकाओं की दीवालों द्वारा अथवा बीच मे रखी किसी बाधा द्वारा परावर्तित होते देखा जा सकता है।

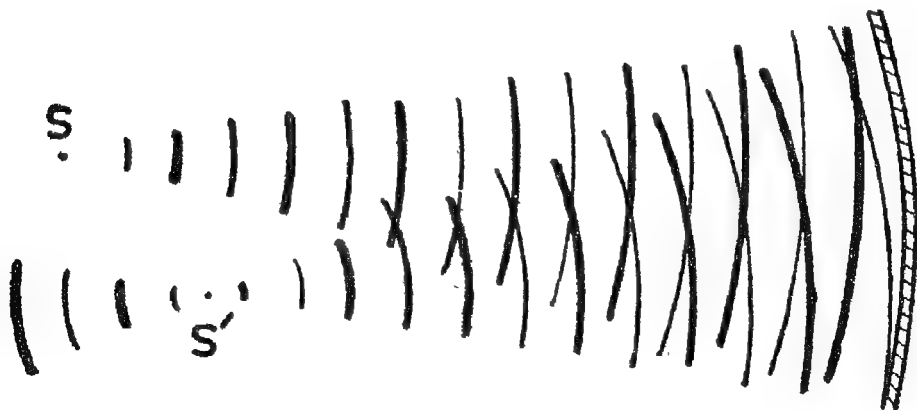
यदि ध्वनि के उत्पन्न होने और प्रतिध्वनि के सुने जाने के बीच समय का अन्तराल t हो तो परावर्तन करने वाली वस्तु की दूरी ct/2 होगी जिसमे c ध्वनि का वेग है। झीलों तथा महासागरों की गहराई नापने का यही सिद्धांत है। सोनार नामक एक युक्ति का उपयोग नौ संचालन में पानी के नीचे की चट्टानों, आइसबर्गों तथा ह्वेल आदि की स्थिति ज्ञात करने के लिए किया जाता है। वायुयानों के संचालन में उपयोग में लायी जाने वाली संगती युक्ति का नाम रेडार है जिसमें विद्युत-चुम्बकीय तरंगों का उपयोग किया जाता है।

प्रकृति में ध्वनि परावर्तन का सबसे विकसित उपयोग चमगादड़ों द्वारा संचालन के लिए किया जाता है। चमगादड़ दृष्टिहीन होते हैं। वे उच्च आवृत्ति की ध्वनि तरंगें प्रेषित करते है और परावर्तन से जो ध्वनि उन्हें प्राप्त होती है उससे वे न केवल (समयान्तराल से) दूरी का अनुमान करते हैं, अपितु परावर्तक पृष्ठ के आकार और प्रकृति का अनुमान (परावर्तन की तीव्रता से) तथा उसकी दिशा का अनुमान (दोनों कानों द्वारा मिली ध्वनि के समयान्तराल से) भी लगा लेते है। उनकी इन्द्रियाँ इतनी विकसित है कि बिना परिकलन के ही वे परिणाम प्राप्त कर लेती हैं।

प्रकाश के लिए चिकने पृष्ठ से परिवर्तन जिन नियमों के अनुसार होता है उनसे हम भली भाँति परिचित हैं। यह जानने के लिए कि वही नियम यांत्रिक

तरंगों के लिए लागू है या नहीं परीक्षण की आवश्यकता है। इसके लिए सबसे अच्छी विधि पानी के किसी कुंड मे ऊर्मिकाग्रो के परावर्तन को अध्ययन करना है। पानी के किसी कुंड मे (चित्र 5.9)

5.9 किसी एक तरंगाग्र PQ की उत्तरोत्तर क्षणों पर दशा 1 जब वह AB की ओर जाता है और परावर्तित होता है (व्यवस्था चित्र)।

एक सीधा अवरोध AB रखिये। अब एक सीधे पैमाने की कोर द्वारा PQ की तरह कोई तरंगाग्र पैदा कीजिये और देखिये कि समय बीतने के साथ-साथ उस भाग का क्या होता है जो AB की ओर जा रहा है। शीर्ष के उत्तरोत्तर भाग AB से टकराते हैं और अन्त में एक नया तरंगाग्र P′Q′ बनता है जो AB से दूर जाता है।[1] चित्र (5.9) मे बीच की अवस्थाएँ भी दिखायी गयी है।) वास्तविक दृश्य इतना सरल नहीं है जितना चित्र (5.9) में दिखाया गया है। विशेषतः कोरें इतनी स्पष्ट अथवा तीखी नहीं होती हैं।[2] परन्तु तरंग के केन्द्रीय भाग का परिवर्तन उसी तरह होता है जैसा दिखाया गया है। प्रयोग द्वारा यह देखा जा सकता है कि PQ तथा P′Q′ दोनों AB के साथ बराबर कोण बनाते हैं परन्तु वे कोण AB के अभिलम्ब के विपरीत पार्श्वों में होते हैं।

ऊर्मिकाओं का प्रयोग बिन्दु मज्जक तथा अवतल परावर्तकों के द्वारा भी किया जा सकता है। चित्र (5.10) में यह दिखाया गया है कि क्या दिखायी देगा। यदि हम S की एक अकेली डुबकी का उपयोग करें तो विभिन्न चापों द्वारा उत्तरोत्तर काल-अन्तरालों पर स्पंद की स्थिति व्यक्त होती है जो S′ पर

5.10 किसी स्रोत S से निकले हुए तरंगाग्रों का अवतल परावर्तक AB द्वारा परावर्तन

1. इस बात की सैद्धान्तिक व्याख्या कि आपतित तरंगाग्र परावर्तन अथवा अपवर्तन के बाद क्यों एक विशेष प्रकार से दिशा अथवा स्वरूप बदलता है, सातवें परिच्छेद प्रकाशिकी में हाइगेन्स की रचना शीर्षक से दी गई है।
2. अकेले एक शीर्ष के स्थान पर ν आवृत्ति पर दोलन करते हुए मज्जित छड़ द्वारा शीर्षों की एक श्रेणी पैदा की जा सकती हैं। उस स्थिति मे उसी ν आवृत्ति के प्रकाश से पृष्ठ को प्रदीप्त किया जाता है और तब एक अप्रगामी दृश्य देखा जा सकता है। तब आपतित तथा परावर्तित तरंगों में तरंग दैर्ध्य और आयतन तथा परावर्तन के कोण सुगमता से नापे जा सकते हैं।

केन्द्रित होती है और फिर फैलती है। वास्तव में इस सिद्धान्त पर प्रत्यक्षतः ध्वनि के प्रयोग से अच्छा प्रदर्शन होता है। S को एक घड़ी, S′ को सुनने वाले का कान तथा परावर्तक AB को 1 मीटर व्यास का बड़ा अवतल पृष्ठ N होना चाहिए। जब कान S′ पर होता है तब घड़ी की टिक-टिक की आवाज स्पष्ट सुनाई पड़ती है, अन्यथा नहीं सुनाई पड़ती। अवतल परावर्तक की फोकस दूरी प्रकाशिकी के सूत्र $f = \frac{uv}{(u+v)}$ से निकाली जा सकती है।

5.10 ध्वनि तरंगों का अपवर्तन (Refraction of Sound Waves)

जब तरंग दो माध्यमों की सीमा रेखा पर पहुँचती है तब यह पाया जाता है कि अंशतः इसका परावर्तन होता है और अंशतः यह दूसरे माध्यम में संचरित हो जाती है।

इसके अध्ययन के लिए हम दो परस्पर जुड़े तारों के साथ प्रयोग करते हैं जिन पर एक ही तनाव है। चित्र (5.11) में O पर परस्पर जुड़े हुए दो तारों AO एवं OB को दिखाया गया है जिन पर एक ही तनाव है। AO में तरंग का वेग c तथा OB में c′ है जहाँ c′<c′ क्योंकि OB का प्रति इकाई द्रव्यमान अधिक है। AO तार में हम एक विभंग उत्पन्न करते हैं। t=0 क्षण पर विभंग ठीक जोड़ O पर पहुँचा है, $t=t_1$ क्षण पर हम विभंग AO तार में P′ पर देखते हैं तथा एक अन्य विभंग OB में Q′ पर है, $t=t_2$ क्षण पर हम इन विभंगों को क्रमशः P″ तथा Q″ तक जाता देखते हैं।

5.11 दो रज्जुओं के जोड़ पर किसी विभंग का परावर्तन एवं संचरण।

पहले हम यह देखते है कि परावर्तित एवं संचरित स्पंद एक साथ पैदा होते है। हम यह भी देखते है कि Q′ Q″ दूरी P′ P″ की अपेक्षा कम है जिससे c′<c′ है। हम एक तीसरी बात भी देखते है: विभंग Q′ की दिशा वही है (ऊपर की ओर) जो P की थी परन्तु परावर्तित विभाग P′ नीचे की ओर है। हम इस प्रयोग को इस तरह दुहरा सकते है कि अपातित विभंग तार OB में प्रारम्भ हो। उस स्थिति में परावर्तित विभंग नीचे की ओर नहीं होता। तारों के कई युग्मों के साथ प्रयोग करने पर हमें एक ही फल मिलता है:

(1) यदि तरंग उस माध्यम से आये जिसमें तरंग का वेग अधिक है तो परावर्तन होने पर विस्थापन की दिशा उलटी हो जाती है, जिस का अर्थ है कि कला में π का परिवर्तन होता है।

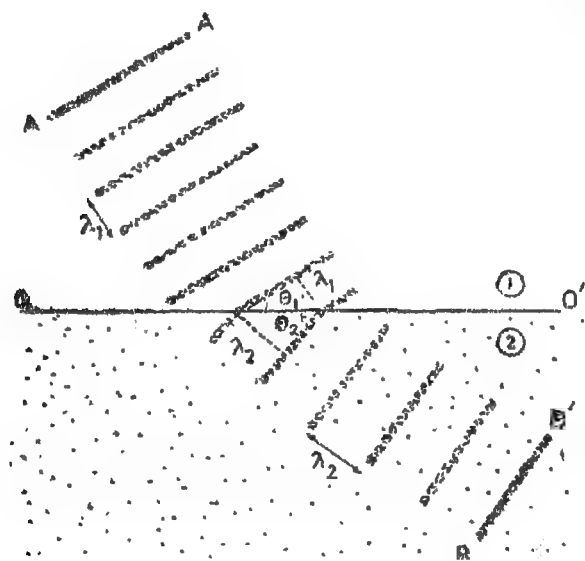
(2) यदि तरंग उस माध्यम से आ रही हो जिसमें तरंग का वेग कम है तो परावर्तन के बाद विस्थापन की दिशा में कोई परिवर्तन नहीं होता अर्थात् कला में कोई परिवर्तन नही होता।

(3) दूसरे माध्यम में गई तरंग में दिशा का कोई परिवर्तन नहीं होता।

अपवर्तन में दिशा के परिवर्तन का अध्ययन के

लिए हमें कम से कम द्विविमीय स्थिति का अध्ययन करने की आवश्यकता है। इसके लिए ऊर्मिकाएँ सुविधाजनक है। दो माध्यम उत्पन्न करने की एक युक्ति है। यदि द्रव की गहराई d कम हो तो ऊर्मिकाओं का वेग गहराई पर निर्भर करता है—d के कम होने के साथ साथ वेग भी कम होता है। अतः यदि कुंड के कुछ भाग मे एक ही मोटाई की चकती रखी हो तो उस भाग मे द्रव की गहराई कम होने के कारण वहाँ तरंग का वेग भी कम होता है।

इस तरह हम प्रयोग से देखते हैं कि तरंगदैर्घ्यों के असमान होने से तरंगाग्र की दिशा में परिवर्तन होता है और समझ सकते है कि क्यो दिये माध्यम युग्मों के लिए ज्याओं का अनुपात अचर होता है।

अतः अपवर्तन के नियम जो प्रकाश किरणों के लिए दिये गये हैं (जिन्हे स्नेल के नियम कहते है) व्यापक रूप से सभी तरंगों के लिए लागू हैं। तरंग सिद्धान्त से यह अतिरिक्त जानकारी प्राप्त होती है कि अपवर्तनांक c_1/c_2 के तुल्य होगा।

5.12 तरंगों का परावर्तन (व्यवस्था चित्र)। माध्यम 1 की अपेक्षा 2 में तरंगवेग अधिक है। $c_2/c_1=\lambda_2/\lambda_1$

सीधे मज्जक की सहायता से हम एक माध्यम में सीधे तरंगाग्र उत्पन्न कर सकते हैं। चित्र (5.12) में माध्यम 1 में AA′ जैसे तरंगाग्र एवं माध्यम 2 में BB′ जैसे तरंगाग्र का आरेखीय चित्र दिखाया गया है। (परावर्तित तरंगों को नही दिखाया गया है।) सिद्धान्ततः λ_1 तथा λ_2 को नापा जा सकता है और $c_1/c_2=\lambda_1/\lambda_2$ निकाला जा सकता है। यदि θ_1 तथा θ_2 आपतन तथा अपवर्तन के कोण है तो साधारण ज्यामिति से यह देखा जा सकता है कि

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}=\frac{c_1}{c_2}= \text{अचर} \quad (5.16)$$

दो प्लास्टिक की वृत्ताकार पट्टियों को मिलाकर उनके किनारो को बन्द करके उनके बीच में वायु के अतिरिक्त कोई अन्य गैस भर कर ध्वनि के लिए लैन्स बनाया जा सकता है। यह सुझाव दिया जाता है कि पट्टियों का व्यास 1 मीटर और बीच में 30 सेमी की मोटाई हो। प्लास्टिक की पट्टियों को पतला होना चाहिए। दो आदमियों को स्रोत तथा अभिग्राही का कार्य करना चाहिये। अभिग्राही इधर उधर चले तो उसे एक विशेष क्षेत्र में उच्च ध्वनि सुनाई पड़ेगी। इसका भी सत्यापन किया जा सकता है कि प्रकाश की तरह ध्वनि के लिए भी किसी लैन्स के लिए

1. उत्तल लैन्स प्राप्त करने के लिए अधिक घनत्व की गैस लेनी चाहिए।

$$\frac{1}{v} + \frac{1}{u} = \text{अचर है}$$

प्रकीर्णन (Scattering)

जब तक हम बहुत उच्च आवृत्तियो पर विचार न करें यांत्रिक तरंगों के तरंग वेग में आवृत्ति के साथ अधिक परिवर्तन नहीं होता। इस कारण प्रकीर्णन का दिखलाना सहज नही है। अतः व्यवहार मे हम प्रकीर्णन की उपेक्षा करते है और मान लेते हैं कि किसी माध्यम के लिए तरंग वेग c' आवृत्ति पर निर्भर नहीं करता। प्रकाश के लिए 'रंगो' का संबंध तरंग-दैर्घ्य, से है अतः आवृत्ति, से है $(\nu = c/\lambda)$। वहाँ श्वेत प्रकाश को प्रिज्म से गुजार कर प्रकीर्णन सहज में दिखाया जा सकता है। इस पर हम सूक्ष्म विचार करें। प्रयोग से स्पष्ट है कि

λ बैंगनी $<$ λ लाल ; μ बैंगनी $>$ μ लाल

पर हमने अब देखा कि

$$\mu = \frac{c \text{ (निर्वात में)}}{c' \text{ (माध्यम में)}}$$

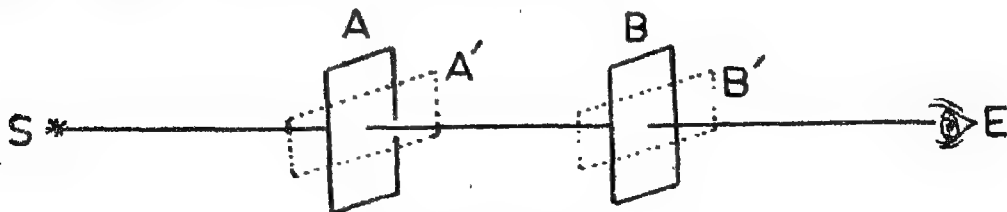
अतः प्रकाश के लिए प्रकीर्णन ऐसा है कि $d\mu/d\lambda$ ऋण तथा (इस कारण) $dc'/d\lambda$ धन है।

5.11 तरंगों का ध्रुवण (Polarisation of Waves)

हम तार में अनुप्रस्थ तरंगों पर विचार करें। यदि तार X दिशा में लम्बा है तो अनुप्रस्थ कम्पन YZ समतल में होंगे। वे दिशा में अथवा Z दिशा में हो सकते हैं अथवा Y दिशा से कोई कोण θ बना सकते हैं। यदि हमारे पास कोई ऐसी तरंग हो जिसमें अनुप्रस्थ समतल सभी दिशाएँ समान रूप से कम्पन में हों तो ऐसी तरंग को अध्रुवित तरंग कहते है। किन्तु यदि कम्पन YZ समतल में किसी एक दिशा में सीमित हों तो तरंग को ध्रुवित कहा जाता है। अनुदैर्घ्य तरंगों में विस्थापन ξ केवल संचरण की दिशा मे होता है, अतः ध्रुवण नही होता।

यदि हम किसी तार को एक ऊर्ध्वाधर रेखाछिद्र से गुजारे और एक सिरे पर लम्बाई के अभिलम्ब विभिन्न दिशाओं में दोलन उत्पन्न करायें तो रेखाछिद्र केवल उर्ध्वाधर दिशा के दोलनों को गुजरने देगा तथा क्षैतिज दोलनों को रोक लेगा।

अब हम प्रकाश के साथ ऐसे प्रयोग का वर्णन करते है जिससे स्पष्ट होगा कि प्रकाश को प्रकृति कणिका की तरह नहीं अपितु तरंग की तरह और अनुदैर्घ्य तरंग की तरह नहीं अपितु अनुप्रस्थ तरंग की तरह होना चाहिए।

यदि हम प्रकाश के किसी स्रोत S को (चित्र 5.13) एक पोलैराइड A को सामने रख कर देखें तो लगभग 50 प्रतिशत तीव्रता कम हो जाती है। यदि चकती को इसके समतल में किसी कोण में घुमाएँ तो तीव्रता में कोई परिवर्तन नहीं देखा जाता। अब यदि पथ में किसी अन्य पोलैराइड B को रखा जाये तो इसकी एक स्थिति में A से गुजरा सब प्रकाश इससे गुजर जाता है। अब यदि B को उसी के समतल में घुमाएँ तो पारगत प्रकाश क्षीण हो जाता है और जब घूर्णन का कोण $\theta = 90°$ (B' स्थिति) होता है तब पूर्णतः रुक जाता है। और अधिक घुमाने पर पारगमन अधिक होता है तथा $\theta = 180°$ पर अधिकतम होता है। इसके विकल्प में यदि B को स्थिर रखें और A को घुमायें तो भी तीव्रता में यही परिवर्तन देखे जाते हैं।[1]

5.13 तुरमली की पट्टिकाओं के साथ प्रयोग।

1. यदि पारगत तीव्रता को प्रयोग से नापा जाय (उदाहरणत: फोटो सेल से), तो हम पायेंगे कि $I = I_0 \cos^2\theta$ जिसमें I_0 अधिकतम तीव्रता है और θ कोण अधिकतम पारगमन की स्थिति की अपेक्षा किसी एक पोलेराइड को घुमाने का कोण है।

यदि प्रकाश को स्रोत से निकले कण समझें तो प्रायोगिक तथ्यों की कोई व्याख्या नहीं है, यदि प्रकाश को अनुदैर्ध्य गमन माना जाय, तो भी इन तथ्यों की कोई व्याख्या नहीं है। प्रायोगिक तथ्यों की व्याख्या के लिए केवल यही तरीका है कि प्रकाश को **अनुप्रस्थ तरंग गमन** समझा जाय। चित्र (5.14) मे चित्र (5.13) की व्यवस्था को दोहराया गया है। इसमें X,Y,Z अक्षों को तथा P,Q,R,S,T वृत्तों को जोड़ा

5.14 दो पोलेरायडों के साथ प्रयोग की व्यवस्था

गया है जिसमें अनुप्रस्थ कंपनों को (यदि X संचरण का अक्ष है तो XZ समतल में) दिखाया है। स्रोत P पर कंपन YZ समतल में बराबर बँटे हैं, पोलेराइड A से गुजरने के पहले तक भी कम्पन समान रूप से वितरित हैं (Q को देखिए)। परन्तु पोलेराइड A में कोई विशेषता है जिससे यह केवल (उदाहरण के लिए) Y दिशा के कंपनों को गुजरने देता है तथा अन्य कम्पनों को रोक लेता है।

चूँकि YZ समतल के विस्थापन सदिश हैं, उन्हें Y एवं Z घटकों में विभाजित किया जा सकता जिसमें पहला गुजर जाता और दूसरा रुक जाता है। इस तरह A से गुजरने के बाद प्रकाश के कंपनों की दिशा केवल Y रहती है (R पर देखिये)। अब Y कंपन पोलेराइड B′ तक जाते है। इस पोलेराइड की वही विशेषता है जो A की है परन्तु इसे 90° से घुमा दिया गया है (आकृति 5.13 देखिये) और इस कारण यह Z दिशा के कंपनों को ही गुजरने देता है। चूँकि आपतित प्रकाश में केवल Y कंपन है (S को देखिये), पोलेराइड B कुछ भी गुजरने नहीं देता (T को देखिये)। यदि B को 90° कोण से घुमाएँ तो इससे Y दिशा के कंपन गुजर सकते हैं और चूँकि आपतित प्रकाश में केवल Y दिशा में कंपन हैं, सभी गुजर जाते हैं।[1]

यदि संचरण की दिशा के अभिलम्ब समतल में प्रकाश के कम्पन सब दिशाओं में समान रूप से हों तो कहा जाता है कि प्रकाश अध्रुवित है। यदि संचरण की दिशा के अभिलम्ब समतल में कंपन एक ही दिशा में सीमित हों तो कहा जाता है कि प्रकाश ध्रुवित बल्कि **समतल ध्रुवित** है। पहले पोलेराइड को ध्रुवक तथा दूसरे को विश्लेषक कहा जाता है। परन्तु इनका आचरण एक सा है और इनकी स्थितियों को परस्पर बदला जा सकता है।

काँच की एक चादर अथवा पानी के पृष्ठ पर ~ 55° के आयतन कोण के परावर्तित प्रकाश को एक पोलेराइड से गुजर कर देखें। यदि पोलेराइड को उसी के समतल में घुमाया जाय तो तीव्रता में बड़ा परिवर्तन होता है। इससे स्पष्ट है कि यह परावर्तित

1. यदि दूसरे पोलेराइड को B स्थिति से θ कोण द्वारा घुमाया जाय तो आयाम का $\cos\theta$ घटक तथा तीव्रता का $\cos^2\theta$ भाग गुजर जाता है। इस तरह प्रकाश के अनुप्रस्थ तरंग स्वरूप से प्रायोगिक प्रेक्षणों की मात्रात्मक व्याख्या की जा सकती है।

प्रकाश ध्रुवित है।

यांत्रिक तरंगों में ध्रुवण देखने का सुयोग आसानी से नहीं आता। वायु में ध्वनि अनुदैर्घ्य तरंग है। तारों पर ध्रुवण सदैव देखा जा सकता है किन्तु इसका व्यावहारिक उपयोग कम है।

5.12 डाप्लर प्रभाव (Doppler Effect)

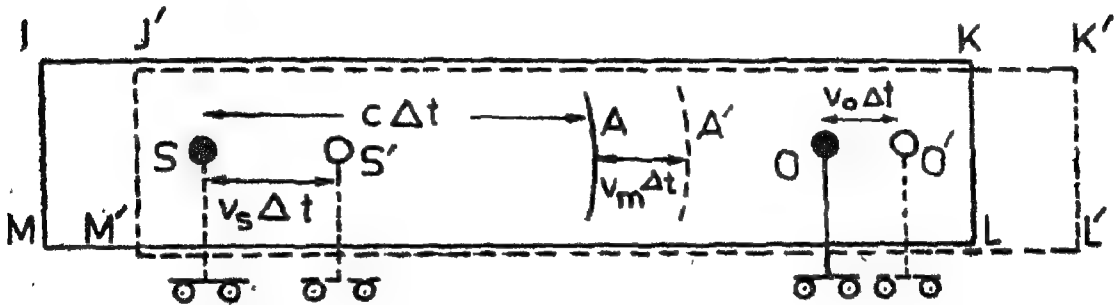
डाप्लर ने यह देखा कि जब स्रोत, माध्यम और प्रेक्षक गतिमान होते हैं तब प्रेक्षक द्वारा अभिगृहीत ध्वनि की आवृत्ति स्रोत द्वारा उत्सर्जित आवृत्ति से

Δt समय में माध्यम की आपेक्षा तरंग का गमन

$$= S'A' = SA - SS' + AA'$$
$$= c\Delta t - V_s\Delta t + V_m\Delta t$$

यदि स्रोत द्वारा ν आवृत्ति की तरंगें निकलती हैं तो Δt समय में $\nu\Delta t$ दोलनों का उत्सर्जन करेगा अतः तरंग दैर्घ्य λ' का मान है

$$\lambda' = \frac{c\Delta t - V_s\Delta t + V_m\Delta t}{\nu\Delta t}$$
$$= \frac{c - V_s + V_m}{\nu} \qquad (5.18)$$

Δt समय में जितनी दूरी की तरंगें प्रेक्षक तक पहुँचती हैं वह $c\Delta t + V_m\Delta t - V_o\Delta t$ है। अतः

5.15 स्रोत, प्रेक्षक तथा माध्यम के Δt काल में क्रमशः $V_s\Delta t$, $V_o\Delta t$, $V_m\Delta t$ गमनों का निरूपण और उसी काल में माध्यम में तरंग के गमन $c\Delta t$ का निरूपण।

भिन्न होती है। इसे डाप्लर प्रभाव कहते हैं।

चित्र (5.15) में S स्रोत, O प्रेक्षक एवं JKLM माध्यम है। माध्यम की आपेक्षा यांत्रिक तरंगों का निश्चित वेग होता है।[1] अतः Δt समय में प्रेक्षक की ओर चलती हुई तरंगें $SA = c\Delta t$ दूरी तय करती हैं। परन्तु माध्यम की गति के कारण तरंगाग्र A' तक पहुँच जाता है जिसमें $AA' = V_m\Delta t$। उसी समय में स्रोत $SS' = V_s\Delta t$ दूरी तय करता है तथा प्रेक्षक $OO' = V_o\Delta t$ दूरी चलता है। यहाँ V_m, V_s एवं V_o क्रमशः माध्यम, स्रोत तथा प्रेक्षक के वेग हैं जिन्हें स्रोत→प्रेक्षक दिशा में धनात्मक लिया गया है।

प्रेक्षक की अपेक्षा वेग $c - V_o + V_m$ है। अतः प्रेक्षक द्वारा सुनी आवृत्तियों की संख्या इस दूरी में λ' तरंग-दैर्घ्य की तरंगों की संख्या ν' है। अतः

$$\nu' = \frac{c - V_o + V_m}{\lambda'}$$
$$= \nu\,\frac{c - V_o + V_m}{c - V_s + V_m} \qquad (5.19)$$

स्रोत की तुलना में माध्यम का गमन कभी-कभी ही पर्याप्त होता है। अतः समीकरण (5.19) को हम संक्षिप्त रूप से लिख सकते हैं और

$$\nu' = \nu\,\frac{c - V_o}{c - V_s} \qquad (5.20)$$

1. यह प्रकाश के लिए लागू नहीं है जिसमें आपेक्षिक गतियाँ नीचे दिये सम्बन्धों के अनुसार नहीं होतीं। इसका अध्ययन आपेक्षिक सिद्धान्त के साथ होगा।

डाप्लर प्रभाव के उदाहरण के रूप में हम सोनार पर विचार कर सकते है जिसमे किसी जलपोत की अपेक्षा पनडुब्बी का वेग ज्ञात किया जाता है। पानी मे $c = 1500$ मी से$^{-1}$ और यदि पानी में पनडुब्बी जलपोत की ओर 5 मी से$^{-1}$ के वेग से आ रही है तो इसका अर्थ है कि स्रोत 10 मी से$^{-1}$ के वेग से समीप आ रहा है। अतः आवृत्ति में 150 भागो में एक भाग का परिवर्तन होता है। यदि $\nu = 60{,}000$ से$^{-1}$ है तो परिवर्तन 400 से$^{-1}$ है। सोनार इस अन्तर को नापता है और इसका अंशाकन इस तरह किया जा सकता है कि यह सीधे पनडुब्बी के समीप आने के वेग को नाप ले।

हमने पहले यह बताया है कि चमगादड़ परावर्तित ध्वनि तरंगों का उपयोग करके वस्तुओं की स्थिति एवं दूरी का ज्ञान प्राप्त करता है। सम्भवतः डाप्लर प्रभाव का उपयोग करके वस्तुओं के समीप आने के वेग का भी ज्ञान प्राप्त करता है।

रडार में विद्युत चुम्बकीय तरंगों का उपयोग किया जाता है जिसके लिए ऊपर दिये गये रूप मे सिद्धांत लागू नही है क्योंकि इन तरंगों के लिए किसी माध्यम की आवश्यकता नहीं होती परन्तु समय और दूरी की नाप V_s तथा V_o पर निर्भर करती है जिसके लिए समीकरण (5.20) जैसा ही फल प्राप्त होता है। यदि प्रेक्षक की अपेक्षा स्रोत का वेग V_s है तो $(V_s/c << 1)$ के लिए (5.20) समीकरण का रूप हो जाताहै।

$$\nu' = \nu \frac{c}{c - V_s} = \nu \left(1 + \frac{V_s}{c}\right) \quad (5.21)$$

सोनार की तरह रडार न केवल वायुयान की स्थिति तथा दूरी का पता लगाता है अपितु आवृत्ति के परिवर्तन की नाप से वेग भी नापता है। V_s को वायुयान के समीप आने के वेग का दूना लिया जाता है क्योंकि स्रोत परावर्तक (वायुयान) द्वारा बनाया हुआ दोलित्र का प्रतिविम्ब है।

डाप्लर प्रभाव का उपयोग खगोल विज्ञान में भी किया जाता है। स्पेक्ट्रमलेखी द्वारा तारों के प्रकाश के निरीक्षण से कई स्पेक्ट्रमी रेखाएँ मिलती है। पृथ्वी पर किसी स्रोत से उन्ही रेखाओं की तुलना करने पर ये रेखाएँ कुछ परिमाण में हटी हुई होती हैं। यह माना जाता है कि यह स्थानान्तरण दृष्टि पथ में उन तारो के गमन के कारण होता है। साधारणतः यह स्थानान्तरण स्पेक्ट्रम के लाल भाग की ओर अर्थात् लम्बे तरंगदैर्ध्य और इस कारण नीची आवृत्ति की ओर होता है। इसका अर्थ है कि तारा हमसे दूर हट रहा है।

उदाहरण 5.6

रेलवे लाइन के पास खड़ा एक आदमी इंजन की सीटी सुनता है। यदि इंजन का वेग 20 मी से$^{-1}$ तथा सीटी की आवृत्ति 1000 हर्त्स (H_z) हो तो उस आदमी को क्या आवृत्ति सुनाई पड़ती है ?

हल

यह दिया हुआ है कि $V_o = 0$ है और हम $V_m = 0$ मान लेते हैं। अतः

$$\nu' = \nu \frac{c}{c - V_s}$$

यदि हम वायु में $c = 340$ मी/से माने तो इंजन आदमी के समीप आ रहा है तब V_s धनराशि $+20$ मी/से है अतः

$$\nu' = 1000 \frac{340}{340 - 20} = 1063 \text{ हर्त्स } (H_z)$$

जब इंजन दूर जा रहा है तब V_s ऋण राशि है और

$$\nu' = 1000 \frac{340}{340 - (-20))} = 944 \text{ हर्त्स } (H_z)$$

उदाहरण 5.7.

एक स्रोत और एक प्रेक्षक एक दूसरे की ओर 40 मी/से के आपेक्षिक वेग से आ रहे हैं। यदि स्रोत की वास्तविक आवृत्ति 1200 हर्त्स (H_z) है, तो निम्न स्थितियों में प्रेक्षित आवृत्ति निकालिए।

(1) कुल वेग स्रोत का ही है,

(2) कुल वेग प्रेक्षक का ही है,

(3) स्रोत प्रेक्षक की ओर 100 मी से$^{-1}$ के वेग से चलता है और प्रेक्षक उसी दिशा मे V_o वेग से चलता है।

हल :

(1) के लिए $\nu' = 1200 \frac{340}{340-40}$

$=1360$ हर्त्स (H_z)

(2) के लिए $\nu' = 1200 \frac{340+40}{340}$

$=1340$ हर्त्स (H_z) क्योंकि $V_o = -40$ (स्रोत से प्रेक्षक दिशा मे विपरीत)

(3) के लिए $\nu' = 1200 \frac{340-60}{340-100}$

$=1400$ हर्त्स (H_z)

क्योंकि $V_o = 100 - 40 = 60$ मी से$^{-1}$

यह ध्यान देने योग्य है कि तीनों स्थितियो में यद्यपि स्रोत तथा प्रेक्षक का आपेक्षिक वेग एक ही है, ν' का मान माध्यम में स्रोत तथा प्रेक्षक के निरपेक्ष वेगों पर निर्भर करता है।

प्रश्न अभ्यास

5·1 (a) चित्र (5·2) से आप कैसे यह निष्कर्ष निकालते है कि सभी प्रकार के स्पंदों की चाल एक ही होती है ?

(b) हाकी के किसी क्षेत्र (~ 100 मी) को पार करने मे ध्वनि को कितना समय लगता है ?

(c) यदि किसी झील की तली मे विस्फोट हो तो पानी मे प्रगामी तरंगें अनुदैर्ध्य होंगी अथवा अनुप्रस्थ होंगी ?

(d) श्रव्य आवृत्तियों का परास 40 हर्त्स से 30,000 हर्त्स तक होता है। इस परास को (i) आवर्त काल, वायु में तरंग दैर्ध्य λ (ii) कोणीय आवृत्ति के रूप में लिखिये।

5·2 (a) एक विस्थापन तरंग $\xi = 0{\cdot}25 \times 10^{-3} \sin (500t - 0{\cdot}025x)$ द्वारा निरूपित की गयी है जिसमें ξ, t तथा x को क्रमशः सेमी, सेकिंड एवं मीटरों में व्यक्त किया गया है। इसके (i) आयाम (ii) आवर्तकाल, (iii) कोणीय आवृत्ति (iv) तरंगदैर्ध्य को निकालिये। कण वेग तथा कण त्वरण को भी निकालिये।

$$\left(0{\cdot}25 \times 10^{-3} \text{ सेमी}, \pi/250, 500 \text{ से}^{-1}, \frac{2\pi}{2{\cdot}5} \text{ मी}, 0{\cdot}1{\cdot}25 \text{ सेमी से}^{-1}, 62{\cdot}5 \text{ सेमी से}^{-2}\right)$$

(b) दो तरंगों की कोणीय आवृत्तियाँ 50 तथा 5000 रेडियन/से हैं। उनके विस्थापन आयाम का मान एक ही 3×10^{-5} सेमी है। उनके त्वरण के आयाम का मान प्राप्त कीजिये।

($7{\cdot}5 \times 10^{-2}$ सेमी से$^{-2}$; $7{\cdot}5 \times 10^{2}$ सेमी से$^{-2}$)

5·3 (a) समीकरण 5·10 में कोसाइन (कोज्या) की जगह साइन (ज्या) को उपयोग कीजिये और $\dot{\xi}$ तथा $\ddot{\xi}$ के संगती व्यंजक ज्ञात कीजिये। इस बात की जाँच कीजिये कि ξ, $\dot{\xi}$ तथा $\ddot{\xi}$ के बीच कला के संबंध के कथन अब भी ठीक हैं या नहीं।

(b) —X अक्ष की ओर जाने वाली किसी तरंग का समीकरण लिखिये। इस बात की जाँच कीजिये कि ξ, $\dot{\xi}$ तथा $\ddot{\xi}$ के बीच कला के संबंध के कथन अब भी ठीक हैं या नहीं।

5·4 2 मिमी व्यास की पानी की एक बूँद 50 सेमी की ऊँचाई से एक ढोल में गिरने पर ध्वनि उत्पन्न करती है जो 5 मीटर की दूरी से सुनी जा सकती है यह मान लीजिये कि गुरुत्वाकर्षण की कुल ऊर्जा ध्वनि में परिवर्तित होती है और परिवर्तन का समय 0·2 सेकिंड है। सुनने वाले के पास तीव्रता और दोलन के आयाम को प्राप्त कीजिये।

($3·3 \times 10^{-7}$ वाट मी$^{-2}$; 6×10^{-9} मी)

5·5 पानी के पृष्ठ पर A तथा B दो बिन्दु हैं जहाँ तरंगें उत्पन्न हो रही हैं। (a) यदि A और B एक ही तरंगाग्र पर हों और उनके बीच दूरी 5 λ हो, (b) यदि A तथा B आनुक्रमिक शीर्षों पर हों पर उनके बीच दूरी 3·5 λ हो, (c) यदि A तथा B आनुक्रमिक गर्तों पर हों, तो उनके बीच कलान्तर क्या होंगे?

(0, 2π, 2π)

5·6 यह सिद्ध कीजिये कि किसी अनुदैर्घ्य तरंग के लिए आयतन विकृति का व्यंजक $-\frac{\partial \xi}{\partial x}$ है जिसमें x समतल में विस्थापन ξ है। इससे यह सिद्ध कीजिये कि A आयाम तथा तरंगदैर्घ्य λ की सरल आवर्ती तरंग के लिए उस माध्यम में, जिसका आयतन प्रत्यास्थता गुणांक E है, अतिरिक्त दाब का व्यंजक है

$$p = EA\frac{2\pi}{\lambda}\sin 2\pi\,(t/T - x/\lambda)$$

यदि E का मान $1·6 \times 10^{5}$ न्यूटन/मी^{2} है, $A = 4 \times 10^{-7}$ मी है तथा $\lambda = 0·5$ मी है तो दाब का आयाम निकालिये।

(8×10^{-3} वाट मी$^{-2}$)

5·7 (a) क्या यह आवश्यक है कि किसी दिये तरंगाग्र पर आयाम अपरिवर्तित हो?
(b) क्या किसी तरंग तंत्र के लिए दो तरंगाग्र एक दूसरे को काट सकते हैं?

5·8 वायु में 1000 हर्त्स की समतल तरंग के लिए विस्थापन आयाम $0·2 \times 10^{-7}$ मी है। (i) वेग आयाम तथा (ii) तीव्रता का मान प्राप्त कीजिये।
($\rho = 1·3$ किग्रा/मी^{3}, तथा $c = 340$ मी से$^{-1}$ लीजिये)।

(1.3×10^{-4} मीसे$^{-1}$; 3.7×10^{-6} वाट/मी$^{-2}$)

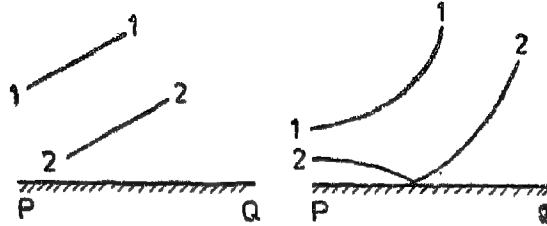
5·9 नीचे के आरेख में PQ दो माध्यमों के बीच पृथक्कारी पृष्ठ है और 1 तथा 2 क्रमशः t_0 तथा $t_0 + t_1$ क्षणों पर तरंगाग्र हैं। ऊपर के माध्यम में $t_0 + 2t_1$ तथा $t_0 + 3t_1$ क्षणों के दोनों तरंगाग्र प्राप्त कीजिये।

5·10 दो पोलेरॉयडों को इस प्रकार समंजित किया जाता है कि पारगत तीव्रता I_0 है। (i) यदि पहले पोलेरॉयड को दक्षिणावर्त्त दिशा 30° में घुमाया जाय तो पारगत तीव्रता (ii) फिर दूसरे को दक्षिणावर्त्त दिशा में 30° घुमाया जाय तो पारगत तीव्रता (iii) अब पहले को वामावर्त्त दिशा में 60° से घुमाया जाय तो पारगत तीव्रता क्या होगी?

($\frac{3}{4} I_0$; I_0; $\frac{1}{4} I_0$)

5·11 एक स्थिर स्रोत से $\nu = 1200$ हर्त्स की ध्वनि निकल रही है। यदि वायु का वेग 0·1c है तो (i) तरंगदैर्घ्य में प्रतिशत परिवर्तन, (ii) आवृत्ति में परिवर्तन एक ऐसे प्रेक्षक के लिए निका-

लिये जो स्रोत से वायु बहने की दिशा में स्थिर है। उस स्थिति के लिए भी गणना कीजिये जिसमें कोई वायु नहीं है पर प्रेक्षक स्रोत की ओर 0·1c की चाल से चल रहा है।

(10% अधिक; 0; 0; 10% अधिक)

5.16.

5·12 एक स्रोत को लीजिये जो प्रेक्षक की ओर $V_s = 0·95c$ के वेग से चल रहा है। यदि मूल आवृत्ति 500 हर्त्स है तो आभासी आवृत्ति की गणना कीजिये। (इस पर विचार कीजिये कि यदि $V_s > c$ तो क्या होगा। जेट वायुयान जो ध्वनि की अपेक्षा अधिक वेग से चलते हैं अब सामान्यत: पाये जाते हैं।)

(10^4 हर्त्स (H_z))

5·13 यदि c_1 किसी गैस में अणुओं की तापीय चाल का वर्ग-माध्य-मूल है तथा c उस गैस में ध्वनि तरंगों का वेग है तो सिद्ध कीजिये कि अनुपात c/c_1, सब गैसों के लिए एक ही है और ताप पर निर्भर नहीं करता।

5·14 किसी रज्जु का प्रति मीटर द्रव्यमान 1·24 ग्राम है। (i) 10 न्यूटन तथा (ii) 100 न्यूटन के तनाव पर इसमें तरंगों का वेग निकालिये। (90 मीसे$^{-1}$; 286 मीसे$^{-1}$)

5·15 यह सिद्ध कीजिये कि वायु में तरंग वेग ताप के 1°C बढ़ने पर लगभग 0·6 मीसे$^{-1}$ बढ़ता है।

5·16 अल्युमिनियम के लिए आयतन प्रत्यास्थता गुणांक $7·5 \times 10^{10}$ न्यूटन/मी^{2} है और इसका घनत्व $2·7 \times 10^3$ किग्रा/मी^{3} है। अल्युमिनियम में अनुदैर्ध्य तरंगों की चाल ज्ञात कीजिये।

(5×10^3 मी से$^{-1}$)

5·17 यह सिद्ध कीजिये कि सरल आवर्ती तरंगों के लिए $\dot{\xi}$ की कला ξ की कला की अपेक्षा $\pi/2$ आगे होती है और $\ddot{\xi}$ की कला इससे भी $\pi/2$ आगे होती है।

5·18 यदि यह दिया हुआ है कि ऐवोगैड्रो संख्या 6×10^{26} प्रति किलोग्राममोल है और सामान्य ताप तथा दाब पर एक किलोग्राम मोल का आयतन 22·4 मी^{3} होता है तो सामान्य ताप तथा दाब पर गैस अणुओं के बीच अंतराल ज्ञात कीजिये और इसकी तुलना प्रभावी आवृत्ति 1000 हर्त्स लेने पर विस्थापन तरंग के आयाम से कीजिये जब वायु में तीव्रता 1 वाट/मी^{2} है।

(आयाम$\sim 3 \times 10^3 \times$बीच की दूरी)

5·19 किसी दूर स्थित तारे से प्राप्त प्रकाश में किसी तत्व की स्पेक्ट्रम रेखा लंबे तरंग दैर्ध्य की ओर 0·032% से विस्थापित है। दृष्टिपथ में तारे का वेग निकालिये।

5·20 (क) किसी रडार के तरंग की आवृत्ति $7·8 \times 10^9$ से$^{-1}$ है। किसी वायुयान से परावर्तित प्रकाश की आवृत्ति इससे $2·7 \times 10^3$ से$^{-1}$ अधिक है। दृष्टि पथ में वायुयान का वेग निकालिए।

($1·8 \times 10^2$ किलोमीटर/घंटा)

अध्याय 6

तरंगों का अध्यारोपण

(*Superposition of Waves*)

यदि आकाश के किसी भाग में एक से अधिक तरंग आती है तो उनका 'प्रभाव' जुड़ जाता है। **अध्यारोपण** के सिद्धान्त के अनुसार यदि $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \cdots$ तरंग 1, 2, 3,... के कारण अलग अलग विस्थापन सदिश हैं तो सब तरंगों के एक साथ प्रभावी होने पर विस्थापन सदिश अलग अलग विस्थापनों के सदिश योग द्वारा व्यक्त किया जायगा। यह ध्यान देने योग्य

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \ldots \qquad (6.1)$$

है कि जुड़ा जाने वाला 'प्रभाव' तीव्रता नहीं अपितु तात्क्षणिक विस्थापन है।

सरलता के लिए हम उन्हीं स्थितियों का अध्ययन करेंगे जिनके दो तरंगों का अध्यारोपण होता है। इसके अतिरिक्त विस्थापन के घटक एक ही दिशा में लिए जायेंगे। तब

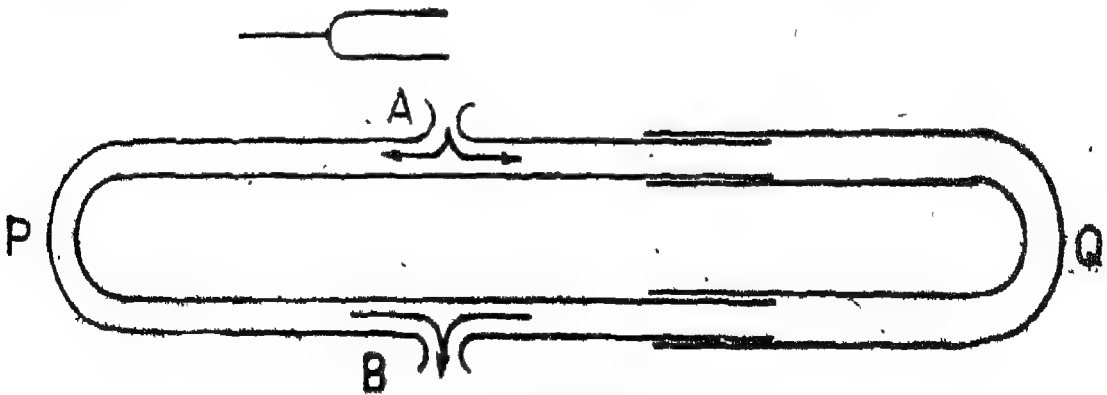
$$\xi = \xi_1 + \xi_2 \qquad (6.2)$$

ξ_1 तथा ξ_2 में प्रत्येक समय एवं अवकाश का फलन होगा। अतः ξ भी समय तथा अवकाश का फलन होगा। महत्वपूर्ण स्थितियाँ निम्नलिखित हैं :

(a) एक ही आवृत्ति की एक ही दिशा में गमन करने वाली दो तरंगें (तरंगों का व्यतिकरण)

(b) एक ही आवृत्ति की विपरीत दिशाओं में चलती हुई दो तरंगे (अप्रगामी तरंग)

(c) एक ही दिशा में चलने वाली थोड़ी विभिन्न आवृत्ति की दो तरंगे (विस्पंद)

इस अध्याय में इनका अध्ययन कुछ व्यापक उपयोगों के साथ किया जायगा।

6.1 क्विंके की नलिका

6.1 तरंगों का व्यतिकरण (Interference of Waves)

किसी रोगी के हृदय का स्पन्दन सुनने के लिए डाक्टर स्टेथास्कोप का उपयोग करता है। दो नलियों द्वारा ध्वनि का संचरण कान तक होता है। दोनों नलियाँ लम्बाई मे बराबर होती है। क्विंके नालियों की युक्ति में इससे यही अन्तर होता है कि दोनों पथ APB तथा AQB (आकृति 6.1) बराबर नही होते। U-शक्ल की एक नली में A तथा B पर छेद होते हैं। U-शक्ल की दूसरी नली पहली पर सरक सकती है। अतः पथ के अन्तर $p = AQB - APB$ को इच्छानुसार बदला जा सकता है।

अब यदि A छेद के पास किसी स्वरित्र द्विभुज को बजाया जाय और सुनने वाले का कान B के पास हो तो यह पाया गया है कि B पर ध्वनि, पथान्तर p पर निर्भर करते हुए कभी प्रबल तथा कभी क्षीण होती है। दो नलियों के भीतर जाने वाली तरंगें A पर एक ही कला में होती हैं परन्तु B पर उनमें आपेक्षिक कालान्तर होगा जो p पर निर्भर करेगा। यदि $p = m\lambda$ (m पूर्णांक) तो कलान्तर $2\,m\pi$ है तथा समीकरण (6.2) से फल मिलता है,

$$\xi = a_1 \cos\omega t + a_2 \cos(\omega t + 2m\pi)$$
$$= (a_1 + a_2)\cos\omega t \qquad (6.3)$$

अतः आयाम $(a_1 + a_2)$ के तुल्य होता है। इसके विपरीत यदि $p = (m+\frac{1}{2})\lambda$, (m पूर्णांक) तो समीकरण (6.2) से फल प्राप्त होता है,

$$\xi = a_1 \cos\omega t + a_2 \cos(\omega t + \overline{2m+1}\pi)$$
$$= (a_1 - a_2)\cos\omega t \qquad (6.3)$$

अतः अब आयाम $(a_1 - a_2)$ के तुल्य होता है। चूंकि ध्वनि की तीव्रता आयाम के वर्ग के अनुपात में होती है, हमें मिलता है कि

$$I_{max} \propto (a_1 + a_2)^2;\ I_{min} \propto (a_1 - a_2)^2$$

साधारणतः पथान्तर p के लिए कलान्तर $\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)p = \phi$ होता है। तब तीव्रता

$$I \propto (a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2\cos\phi) \qquad (6.4)$$

होती है। परन्तु हम यहाँ इसकी उपपत्ति नहीं देंगे।

यह परिघटना, जिसमे एक ही आवृत्ति की दो तरंगो के अध्यारोपण से तीव्रता मे परिवर्तन होता है, **तरंगों का व्यतिकरण** कहलाता है। यदि दो तरंगों का पथान्तर $m\lambda$ हो तो उच्चतम और यदि यह $(m+\frac{1}{2})\lambda$ हो तो न्यूनतम तीव्रता प्राप्त होती है।

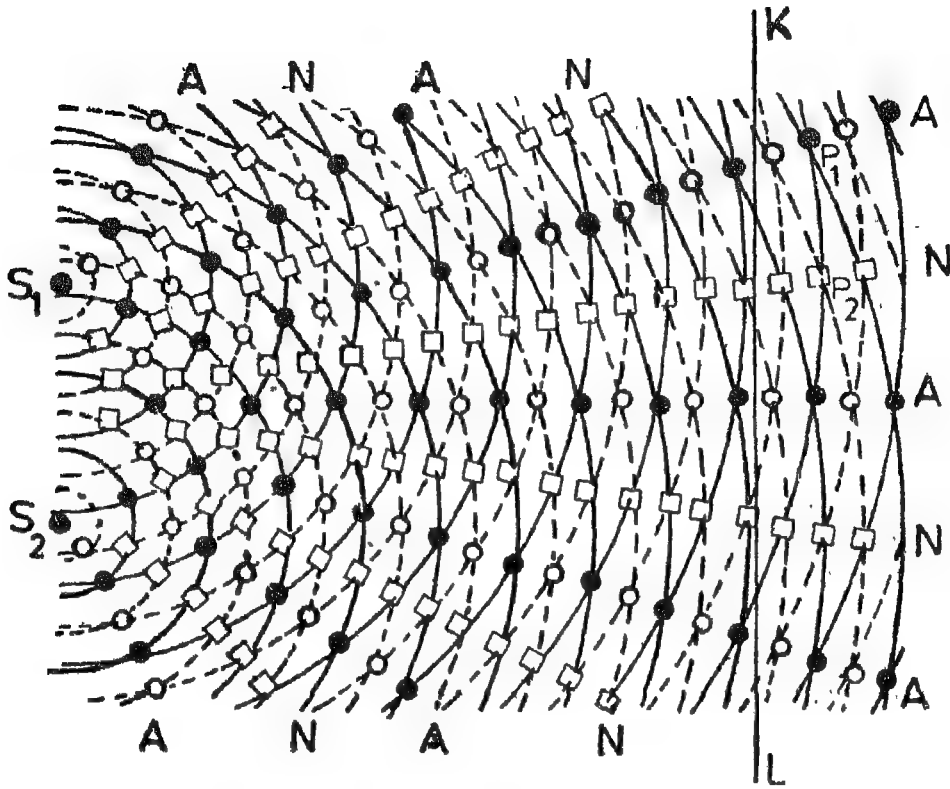
आकाश में व्यतिकरण (Interference in space)

क्विंके की नलिका मे तरंगें B बिन्दु से U-शक्ल की दो नलियों द्वारा संचालित हुई थी। परन्तु चित्र (6.2) पर विचार कीजिये जिसमे (ऊर्मिका टंकी की तरह) उथले पानी के कुंड में S_1 एवं S_2 दो प्रज्जक हो सकते हैं। किसी क्षण पर S_1 तथा S_2 द्वारा उत्पादित शीर्षों एवं गर्तों को क्रमशः पूरी रेखाओं तथा बिन्दुकित रेखाओं द्वारा प्रदर्शित किया गया है। पानी के पूरे पृष्ठ पर S_1 तथा S_2 दोनों से तरगें पहुँचती हैं। अतः पूरे पृष्ठ पर व्यतिकरण देखने मे आता है।

यदि S_1 तथा S_2 (एक ही आवृत्ति के) दो स्वरित्र द्विभुज होते तो दोनों से तरंगें त्रिविमीय आकाश में सभी जगह पहुँचती और आकाश मे व्यतिकरण दिखायी देता।

सुविधा के लिए हम ऊर्मिकाओं का विवेचन करेंगे। जहाँ कहीं भी शीर्ष से शीर्ष मिलेगा वहाँ प्रबलतर शीर्ष होगा, जहाँ कहीं भी गर्त से गर्त मिलेगा वहाँ प्रबलतर गर्त होगा। जहाँ कहीं शीर्ष से गर्त मिलेगा वहाँ प्रभाव निरसित हो जायगा। आकृति में ये बिन्दु क्रमशः ●, o तथा □ द्वारा सूचित किये गये हैं। काल व्यतीत होने के साथ P_1 जैसे बिन्दु पर एकान्तरतः प्रबल शीर्ष एवं प्रबल गर्त होंगे, अर्थात् वहाँ विक्षोभ प्रबल होगा। इसके विपरीत P_2 जैसे बिन्दुओं, □ स्थिति, पर सभी समयों पर शीर्षों तथा गर्तों का निरसन होगा, अर्थात् वहाँ विक्षोभ बहुत क्षीण या शून्य होगा।[1]

अधिकतम तथा न्यूनतम की स्थितियाँ एक सरल नियम द्वारा प्राप्त की जा सकती हैं। यदि p प्रेक्षक का

1. यदि मज्जकों की आवृत्ति वाला प्रकाश आंतरयिकता से ऊर्मिकाओं पर डाला जाय और प्रतिबिम्ब को एक परदे पर प्रक्षिप्त किया जाय तो ऊर्मिकाओं का दृश्य दिखेगा।

6.2 दो स्रोतों S_1 तथा S_2 के बीच व्यतिकरण

कोई सामान्य बिन्दु है तो

$$p = S_2P - S_1P \quad (6.5)$$

राशि को पथान्तर कहते हैं। P पर अधिकतम तीव्रता होगी यदि $p = 0, \lambda, 2\lambda, \ldots\ldots m\lambda$ (6.6a)

तथा न्यूनतम तीव्रता होगी यदि

$$p = \tfrac{1}{2}\lambda, \tfrac{3}{2}\lambda, \tfrac{5}{2}\lambda, \ldots (m + \tfrac{1}{2}\lambda) \quad (6.6b)$$

इसमें यह मान लिया गया है कि S_1 तथा S_2 द्वारा उत्सर्जित तरंगें एक ही कला में हैं। यदि स्रोतों द्वारा उत्सर्जित तरंगों में कलान्तर π है तो अधिकतम तथा न्यूनतम के प्रतिबन्ध परस्पर बदल जायेंगे। व्यापक रूप से यदि S_1 की अपेक्षा कला में S_2, ϕ_0 से आगे है तो अधिकतम तथा न्यूनतम के प्रतिबन्ध निम्नलिखित हो जाते है :

$$\phi_0 + \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right) p = 2m\pi \text{ (अधिकतम के लिए)}$$
$$= (2m+1)\pi \text{ (न्यूनतम के लिए)} \quad (6.7)$$

उदाहरण 6.1

यदि चित्र (6.2) के दोनों स्रोत रेडियो के दो ऊर्ध्वाधर एण्टेना हैं जो एक ही तीव्रता की 80 मीटर लंबी तरंगें भेज रहे है तथा S_1 S_2 दूरी 40 मी है तो S_1 S_2 दिशा के बिन्दुओं पर, S_2 S_1 दिशा के बिन्दुओं पर तथा S_1 S_2 के अभिलंबी द्विभाजक पर परिणामी तरंग की तीव्रता का विवेचन कीजिये जब कि (i) S_1 तथा S_2 एक ही कला में है, (ii) S_1 एवं S_2 विपरीत कलाओं में हैं।

पहली स्थिति में किसी बिन्दु पर कला का अन्तर पथान्तर $PS_1 - PS_2$ के कारण है। अभिलंबी द्विभाजक पर अन्तर शून्य है, अतः वहाँ अधिकतम आयाम $2a_1$, तथा अधिकतम तीव्रता $4I_1$, होती है, जहाँ a_1 तथा I_1 क्रमशः एक एण्टेना से आयाम तथा तीव्रता है। S_1S_2 दिशा में पथान्तर $S_2P - S_1P = 40$ मी $= -\lambda/2$ । S_2S_1 दिशा में

पथान्तर $+\lambda/2$ । अतः इन दोनों दिशाओं में न्यूनतम आयाम 0 तथा न्यूनतम तीव्रता 0 होती है ।

दूसरी स्थिति में कल्पना करें कि कला में S_2 से S_1 आगे है । तब अभिलंबी द्विभाजक की दिशा में $S_2P - S_1P = 0$ है और π का कलान्तर केवल स्रोतों के कारण है । अतः इस दिशा में तीव्रता शून्य होगी । S_1S_2 दिशा मे $S_2P - S_1P = -\lambda/2$ अतः पथान्तर के कारण S_1 से आनेवाली तरंग कला में π परिमाण से पीछे हो जाती है । चूँकि कला मे स्रोत S_1, π परिमाण से आगे है, नेट परिणाम यह होता है कि $S_1 S_2$ दिशा में तरंगें एक ही कला में पहुँचती हैं तथा तीव्रता $4I_1$ होती है । S_2S_1 दिशा में स्रोत के कारण कलान्तर π है तथा पथान्तर के कारण $+\pi$ है, अतः कुल अन्तर 2π है । तरंगें फिर एक ही कला में पहुँचती है और तीव्रता $4I_1$ है ।

अधिकतम एवं न्यूनतम तीव्रताएँ (Maximum and Minimum Intensities)

यदि प्रेक्षण बिन्दु पर S_1 तथा S_2 स्रोतों से अलग अलग तीव्रताएँ I_1 और I_2 है तो संगती आयामों a_1 तथा a_2 के सम्बन्ध का समीकरण है

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{a_1^2}{a_2^2} \tag{6.8}$$

जब दोनों स्रोतों से तरंगें आ रही होती हैं तब अधिकतम तथा न्यूनतम आयाम क्रमशः a_1+a_2 एवं a_1-a_2 होते है । अतः अधिकतम तीव्रता I_{max} और न्यूनतम तीव्रता I_{min} का सम्बन्ध होता है

$$\frac{I_{max}}{I_{min}} = \frac{(a_1+a_2)^2}{(a_1-a_2)^2} \tag{6.9}$$

यदि आयामों के अनुपात $r = a_1/a_2$ का उपयोग करें तो पिछले परिणाम को इस प्रकार लिख सकते हैं :

$$\frac{I_{max}}{I_{min}} = \frac{(r+1)^2}{(r-1)^2} \tag{6.10}$$

जिसमें $r = \sqrt{\frac{I_1}{I_2}}$

उदाहरण 6.2

यदि दो स्रोतों की तीव्रताओं का अनुपात 100 : 1 हो तो व्यतिकरण में अधिकतम एवं न्यूनतम तीव्र ताओं का अनुपात ज्ञात कीजिये ।

हल : आयामों का अनुपात $r = \sqrt{\frac{100}{1}} = 10$

$$\frac{I_{max}}{I_{min}} = \frac{(10+1)^2}{(10-1)^2} = \frac{121}{81} = 3 : 2$$

उदाहरण 6.3

I_o तथा $4I_o$ तीव्रताओं के दो स्रोतों द्वारा व्यतिकरण में उन बिन्दुओं पर तीव्रताएँ प्राप्त कीजिये जहाँ कलान्तर (1) शून्य, (2) $\pi/_2$, (3) π एवं (4) $3\pi/2$ हैं ।

हल : चूँकि आयाम तीव्रता के वर्गमूल का समानुपाती है, आयाम A_o तथा $2A_o$ होंगे । अब सभी स्थितियों में

$$\xi = A_o \cos \omega t + 2A_o \cos (\omega t + \phi)$$

पहली स्थिति में $\phi = 0$, अतः

$$\xi = (A_o + 2A_o) \cos \omega t$$

और आयाम $= 3A_o$; तीव्रता $= 9I_o$

दूसरी स्थिति में $\phi = \pi/2$ अतः

$$\xi = A_o \cos \omega t - 2A_o \sin \omega t$$
$$= \sqrt{A_o^2 + 4A_o^2} \cos (\omega t + \delta)^*, \tan\delta = 2$$

आयाम $= A_o \sqrt{5}$ तीव्रता $= 5I_o$

तीसरी स्थिति में $\phi = \pi$ अतः

$$\xi = (A_o - 2A_o) \cos\omega t$$

आयाम $= -A_o$ तीव्रता $= I_o$

चौथी स्थिति में $\phi = 3\pi/2$ अतः

$$\xi = A_o \cos \omega t + 2A_o \sin\omega t$$
$$= \sqrt{A_o^2 + 4A_o^2} \cos (\omega t + \delta);$$
$$\tan \delta = -2$$

आयाम $= A_o \sqrt{5}$ तीव्रता $= 5 I_o$

व्यतिकरण फ्रिंज तथा फ्रिंजों की चौड़ाई (Interfence Fringes and Fringe Width)

यदि आकृति (6.2) में स्रोत S_1 तथा S_2 एक ही स्वर उत्पन्न करने वाली दो बाँसुरियाँ हैं तो KL रेखा पर चलने पर एकान्तर से अधिकतम एवं न्यूनतम ध्वनि सुनाई पड़ती है। परन्तु यदि S_1 तथा S_2 प्रकाश की एक ही आवृत्ति के दो स्रोत हैं[1] तो KL पर रखे किसी परदे पर एकान्तर से द्युतिमान तथा काली धारियाँ दिखायी देंगी। इन्हें फ्रिंज कहते हैं और दो उत्तरोत्तर अधिकतम एवं न्यूनतम प्रकाश की धारियों के पार्थक्य को फ्रिंज की चौड़ाई w कहते हैं।

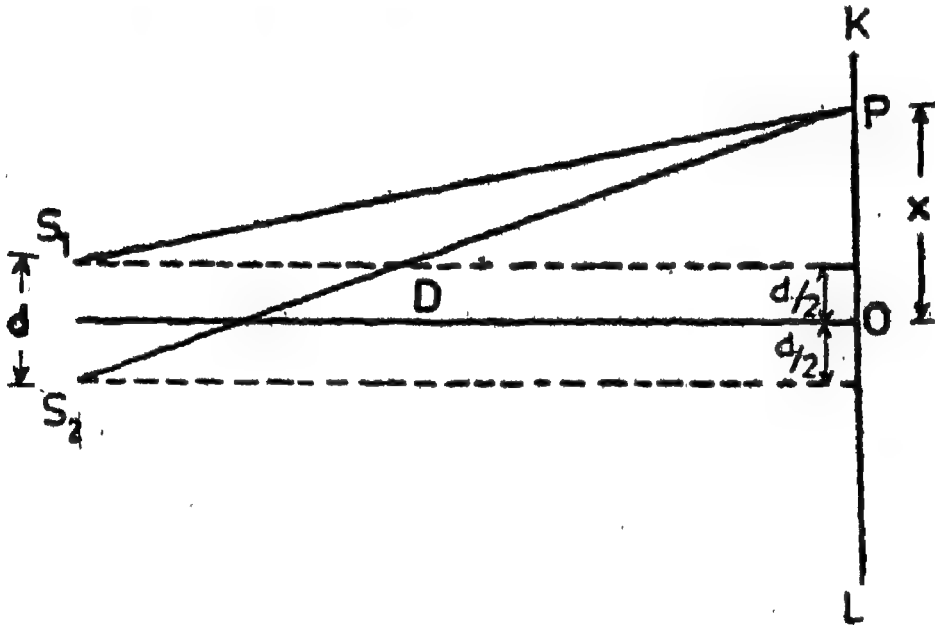
पार्थक्य d है, D दूरी पर KL प्रेक्षण समतल है। O बिन्दु S_1 एवं S_2 से एक ही दूरी पर है और प्रेक्षण के बिन्दु P की दूरी O से x है। अब

$$S_1P^2 = D^2 + (x - d/2)^2$$

$$= D^2\left(1 + \frac{(D - d/2)^2}{D^2}\right)$$

वर्गमूल लेने से तथा द्विपद-प्रमेय के उपयोग से

$(x \ll D)$ $S_1P = D + \frac{1}{2}\frac{(x - d/2)^2}{D}$ इसी तरह

$$S_2P = D + \frac{1}{2}\frac{(D + d2/)^2}{D}$$

6.3 फ्रिंज की चौड़ाई w को प्राप्त करना

चूंकि प्रकाश का तरंगदैर्घ्य बहुत कम होता है, अतः पार्थक्य $= S_1S_2$ का मान प्रेक्षण समतल की दूरी की अपेक्षा बहुत कम होना चाहिए।

आकृति 6.3 से फ्रिंजों की चौड़ाई का व्यंजक निकाला जा सकता है S_1 तथा S_2 स्रोत हैं जिनका

अतः पथान्तर का मान है

$$p = S_2P - S_1P = \frac{xd}{D} \qquad (6.11)$$

(6.6) एवं (6.7) समीकरणों में यह मान रखने

1. प्रकाश के लिए S_1 एवं S_2 के कलान्तर को स्थिर रखने के लिए विशेष व्यवस्था की आवश्यकता होती है। इस बात पर हम सातवें परिच्छेद में विचार करेंगे।

पर

$$x \text{ (अधिकतम के लिए)} = m\ \frac{D\lambda}{d} \quad (6\ 12a)$$

x (न्यूनतम के लिए)

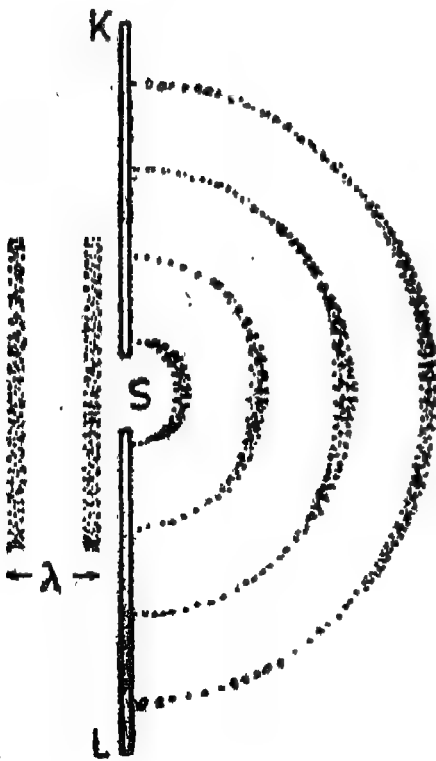
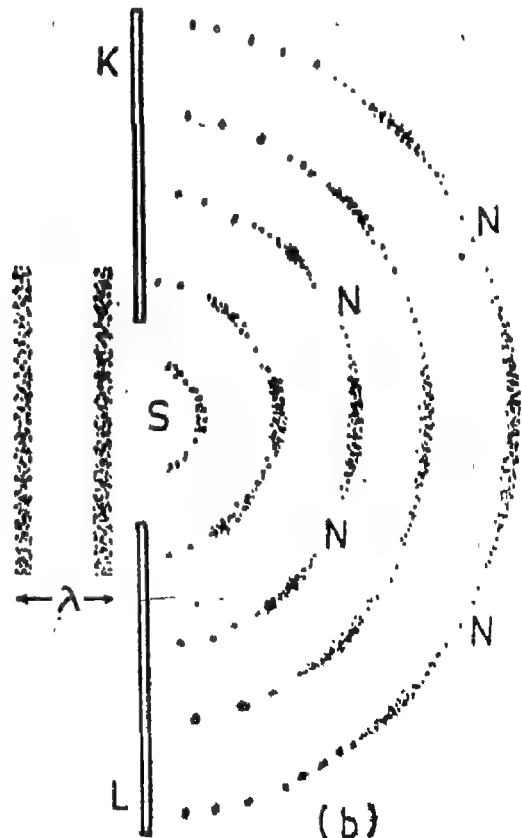
$$= (m + \tfrac{1}{2})\frac{D\lambda}{d} \quad (6{\cdot}12b)$$

फ्रिंज की चौड़ाई m का मान (m+1) होने पर x में परिवर्तन है। अतः

$$w = \frac{D\lambda}{d} \quad (6.13)$$

यह उल्लेखनीय है कि यदि S_1 तथा S_2 स्रोतों में कुछ कलान्तर है तो समीकरण (6.12) में m पूर्णांक नहीं होगा, तथापि समीकरण (6.13) लागू रहेगा। इसी कारण w, D तथा d को नाप कर समीकरण (6 13) के उपयोग से λ का मान निकाला जाता है।

6·2 तरंगों का विवर्तन (Diffraction of Waves)

किसी ऊर्मिका टंकी में हम एक अवरोधी पट्टी KL रखें जिसमें एक रेखाछिद्र S हो (आकृति 6 4)। यदि बायीं ओर सीधे तरंगाग्र पैदा किये जायें (उदाहरणतः एक सीधे पैमाने को बार बार डुबो कर) तो KL के दूसरी ओर के प्रेक्षण बहुत दिलचस्प होते हैं।

6.4 किसी विवर S से ऊर्मिकाओं का गुजरना। स्थिति (a) विवर <λ, स्थिति (b) विवर ~2λ

यदि छेद S की चौड़ाई λ से कम हो तो हम देखते हैं कि ऊर्मिकाएँ S से चारों ओर फैल जाती हैं। यदि छेद λ से बड़ा हो तो ऊर्मिकाएँ अभिलम्ब दिशा से कुछ कोण बनाती हुई फैलती है, फिर कुछ क्षेत्र में जैसे आकृति 6·4 (b) में NN क्षेत्र में नहीं दिखायी देतीं और वे फिर दिखायी देती हैं यद्यपि अब वे पहले की अपेक्षा क्षीण हैं।

ऊर्मिकाओं का अवरोधों के चारों ओर यह फैलना विवर्तन कहलाता है। वायु में अथवा किसी भी माध्यम में कोनों के गिर्द घूम जाने की परिघटना, अर्थात् विवर्तन को ध्वनि तरंगों में देखा जा सकता है। तरंग गति का यह विशिष्ट गुण है।

ध्वनि के लिए हम विवर्तन की परिघटना पर विशेष आश्चर्य नहीं करते क्योंकि दैनिक अनुभव में खिड़की से दूर खड़े रहने पर भी हम कमरे के अन्दर की बातचीत सुन सकते है। परन्तु प्रकाश के लिए विवर्तन आम अनुभव की बात नहीं है क्योंकि खिड़की से दूर खड़े रहने पर वक्ता को देख सकना असंभव है। परन्तु यदि छेद की चौड़ाई 10^{-3} सेमी अथवा इससे कम हो, तो प्रकाश के लिए भी विवर्तन देखा जाता है। जब छेद की चौड़ाई और भी कम हो तो प्रकाश का विवर्तन अधिक स्पष्ट रूप से देखा जाता है। इस तथ्य से हमे दो निष्कर्ष प्राप्त होते है (i) प्रकाश में भी ध्वनि की भाँति तरंग का आचरण होता है, (ii) दृश्य प्रकाश का तरंग दैर्ध्य एक साधारण खिड़की की तुलना में बहुत कम है, निस्सन्देह यह 10^{-3} सेमी से कम है। विवर्तन के विषय में हम अगले अध्याय 'प्रकाशिकी' में अधिक अध्ययन करेंगे।

6·3 स्पंद (Beats)

यदि किंचित् विभिन्न आवृत्तियों के दो स्रोत एक ही साथ तरंगों का उत्सर्जन करें तो आकाश के प्रत्येक बिन्दु पर समय के साथ तीव्रता में परिवर्तन होता है। व्यतिकरण में (काल के साथ नहीं) स्थितियों के साथ तीव्रता में परिवर्तन होता है। इसके विपरीत इसमें किसी स्थान पर तीव्रता काल के साथ परिवर्तित होती है। एकान्तर से प्रबल एवं क्षीण ध्वनि सुनाई पड़ती है। इस परिघटना को स्पंद कहते हैं। एक प्रबल ध्वनि से दूसरी प्रबल ध्वनि के कालान्तर को स्पन्दन काल और एक सेकिन्ड में जितनी बार इसका पुनरावर्तन होता है उसे स्पंद आवृत्ति कहते है।

गणित के अनुसार स्पंद की व्याख्या निम्नलिखित है: कल्पना कर कि प्रेक्षण बिन्दु पर दोनों स्रोतों के कारण हुए दोलन को हम लिख सकते हैं कि

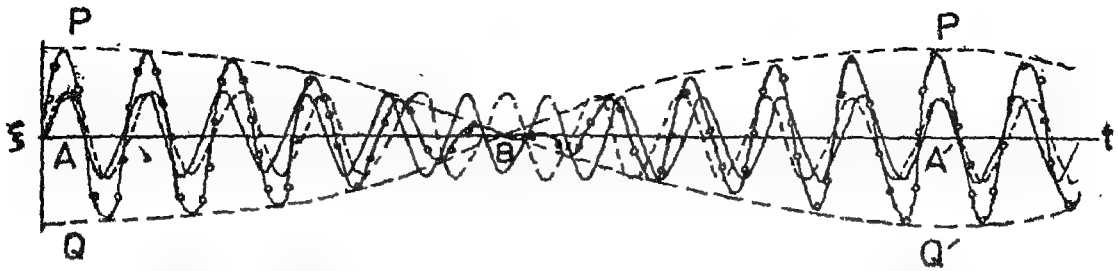
$$\xi_1 = a_1 \cos 2\pi \nu t \ldots\ldots \quad (6.14)$$

$$\xi_2 = a_2 \cos 2\pi (\nu + m) t \ldots\ldots \quad (6.15)$$

यहाँ आवृत्तियाँ ν तथा $\nu+m$ हैं और हम मानते हैं कि $m \ll \nu$ अर्थात् आवृत्तियों का अन्तर बहुत थोड़ा है। कलान्तर के लिए हम पाते हैं कि

$$\phi = 2\pi (\nu + m) t - 2\pi \nu t = 2\pi m t. \quad (6{\cdot}16)$$

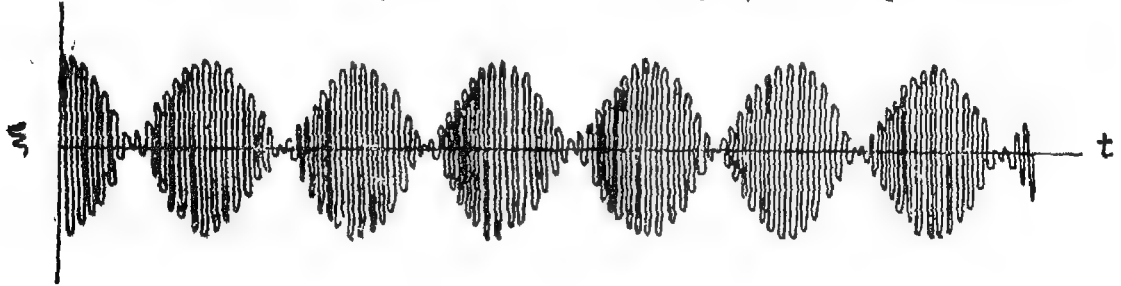
अर्थात् काल के साथ कलान्तर में परिवर्तन होता है। परन्तु परिणामी विक्षोभ $\xi = \xi_1 + \xi_2$ तब अधिकतम होता है जब $\phi = 0, 2\pi, 4\pi, \ldots$ तथा न्यूनतम होता है जब $\phi = \pi, 3\pi, 5\pi, \ldots$ अतः समय व्यतीत होने के साथ हमें एकान्तर से अधिकतम तथा न्यूनतम ध्वनि सुनाई पड़ती है। कलान्तर के प्रत्येक 2π परिवर्तन से हमें एक स्पंद सुनाई पड़ता है। एक सेकिंड में ϕ का परिवर्तन $2m\pi$ होता है और इस कारण m स्पंद सुनाई पड़ते हैं। अतः प्रति सेकण्ड स्पंदों की संख्या स्पंद आवृत्तियों के अन्तर के बराबर होती है।

ग्राफीय विधि से हम स्पन्दों को आकृति (6.5) की सहायता से समझ सकते हैं। पूर्ण रेखा वक्र एक दोलन के लिए $\xi_1 t$ का ग्राफ है, बिन्दकित वक्र दूसरे दोलन के लिए है जिसका दोलन काल थोड़ा कम (ऊँची आवृत्ति) है। प्रारम्भ में (A) पर दोनों दोलन एक ही कला में हैं। किन्तु जैसे समय बीतता है वे विपरीत कलाओं में हो जाते हैं (B), इससे आगे फिर उनकी कलाएं एक हो जाती हैं (A′) और आगे भी ऐसा ही होता है। परिणामी दोलन को मणिकामय वक्र द्वारा प्रदर्शित किया गया है और समय के व्यतीत होने के साथ परिणामी आयाम की वृद्धि

6.5 थोड़ी विभिन्न आवृत्तियों की दो तरंगों का अध्यारोपण । परिणामी आयाम में काल के साथ परिवर्तन होता है ।

एवं ह्रास देखा जा सकता है । चित्र में PBQ′ तथा तथा QBP′ वक्र ठीक-ठीक यह दिखलाते हैं कि किस प्रकार आयाम समय के साथ परिवर्तित होता है । P से P′ तक एक स्पंदन काल है, यदि एक तरंग इस समय में x दोलन पूरा करती है तो दूसरी तरंग इसी समय x+1 दोलन पूरा करती है ।

संगीतज्ञ अपने वाद्यों की आवृत्तियों को मिलाने के लिए स्पंद का अच्छा उपयोग करते हैं । यदि आवृत्तियों में थोड़ा अन्तर हो तो इससे सीधे ध्वनि की प्रकृति को नहीं आँका जा सकता परन्तु यदि वाद्यों को एक साथ बजाया जाय तो स्पंद सुनाई पड़ते हैं । तब एक वाद्य को तब तक समायोजित किया जाता है जब तक स्पन्द समाप्त नहीं हो जाते ।

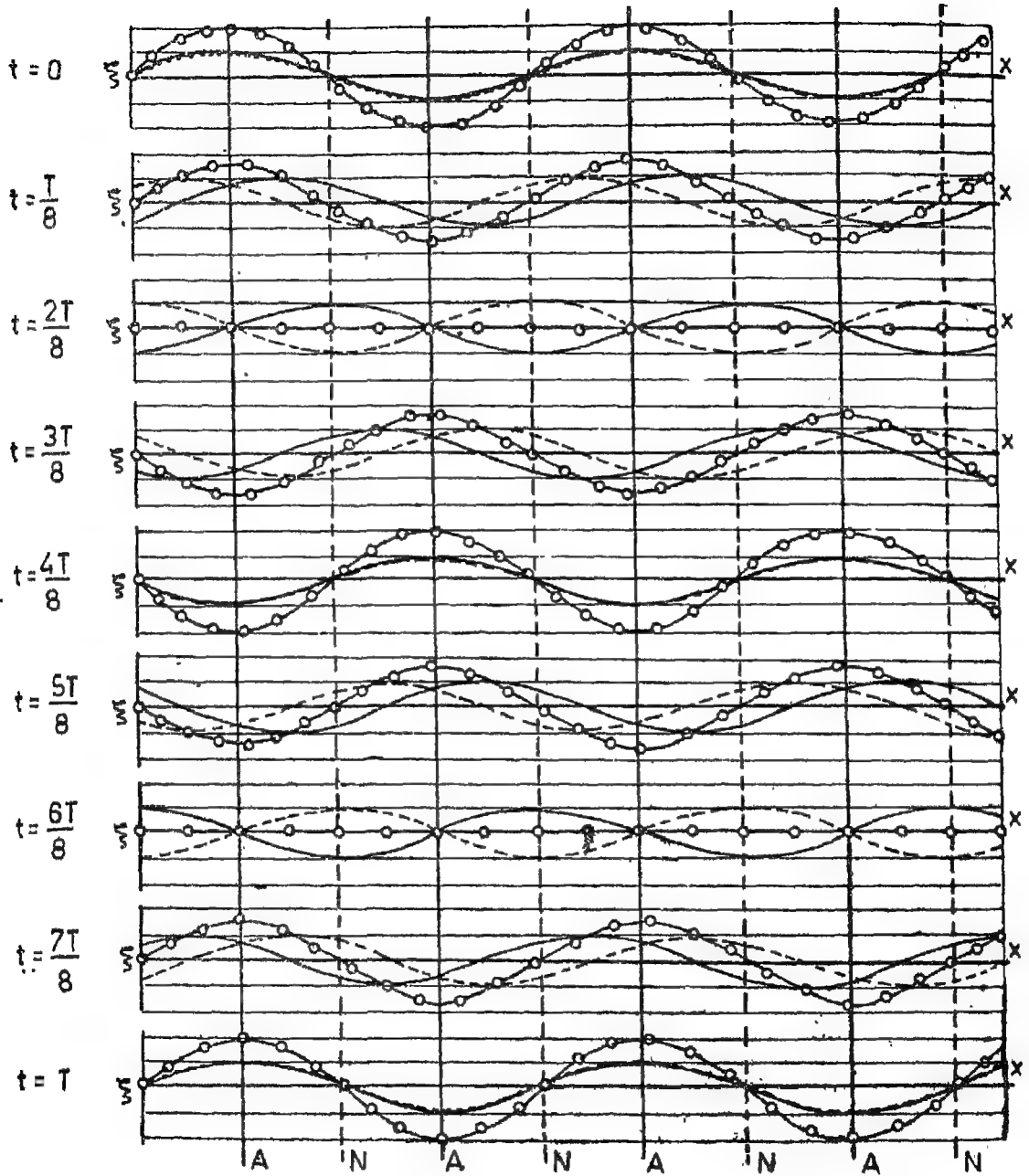
इलेक्ट्रानिकी में स्पंद आवृत्ति का बहुधा उपयोग किया जाता है । निम्न आवृत्ति के दोलित्रों को बनाना कठिन है ।

अतः प्रथा यह है कि दो उच्च आवृत्ति के दोलित्र बनाये जाते हैं जिनकी आवृत्तियों में थोड़ा अन्तर होता है । आकृति (6·6) में स्पंद आवृत्ति दोलन प्रदर्शित

6.6 विस्पंद आवृत्ति दोलन

किए गए हैं जिनकी आवृत्ति $\frac{1}{T}$ है जहाँ T स्पन्द काल है । परिशुद्धता के साथ आवृत्ति ज्ञात करने के लिए भी स्पंद के सिद्धान्त का उपयोग किया जाता है । अज्ञात आवृत्ति के दोलनों को मानक दोलित्र के दोलनों से मिलाया जाता है और मानक की आवृत्ति को तब तक समायोजित किया जब तक स्पन्द समाप्त नहीं हो जाते ।

उदाहरण 6.4

कोई स्वरित्र द्विभुज P किसी अन्य स्वरित्र द्विभुज Q के साथ प्रति सेकिन्ड 5 स्पंद उत्पन्न करता है । यदि Q की आवृत्ति 284 हर्त्स (H_z) है तो P स्वरित्र द्विभुज की आवृत्ति ज्ञात कीजिए ।

हल : आवृत्ति का अन्तर=स्पंद/सेकिंड
=5 हर्त्स (H_z)
अतः P की आवृत्ति या तो

6.7 विपरीत दिशाओं में चलने बवाली रावर λ तथा बराबर आयाम की दो तरंगों का अध्यारोपण। $\frac{T}{8}$ के अंतराल पर 8 अवस्थाएं दिखाई गई है।

(284+5) हर्त्स (H_2) है अथवा (284—5) हर्त्स है।

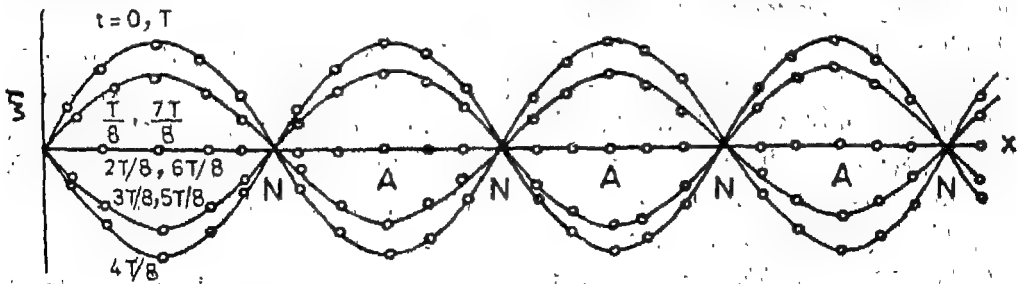
टिप्पणी : दोनों उत्तरों में ठीक उत्तर चुनने के लिए, स्वरित्र P पर थोड़ा सा भार (थोड़े मोम से) रखा जाता है। अब इसकी आवृत्ति कम हो जायेगी। अब यदि स्पंदों की संख्या होती है तो आवृत्ति 289 हर्त्स थी, अन्यथा 279 हर्त्स थी।

6·4 अप्रगामी तरंगें (Stationary Waves)

अब हम दो तरंगों के अध्यारोपण पर विचार करेंगे जिनकी आवृत्ति और आयाम बराबर है और जो एक ही माध्यम में विपरीत दिशाओं में चल रही हैं। परिणामी तरंग ऐसी होती है जो काल के साथ किसी दिशा में भी नहीं चलती। इस कारण इन तरंगों को उन तरंगों की तुलना में, जिनका अभी तक हमने विवेचन किया है और जो किसी वेग c से चलती और इस कारण चलने वाली अथवा प्रगामी तरंगें कहलाती हैं, अप्रगामी तरंग कहते हैं।

ग्राफीय विधि (Graphical Method)

अध्यारोपण का परिणाम जानने की एक विधि यह है कि विपरीत दिशाओं में चलने वाली तरंगों के समीकरण लिखे जायें और उन्हें जोड़ा जाये। परन्तु हम ग्राफीय विधि का उपयोग करेंगे और घटक तरंगों के लिए समान कालान्तरों पर ξ, x का ग्राफ खीचेंगे और प्रत्येक x पर ξ_1 तथा ξ_2 को जोड़कर परिणामी तरंग प्राप्त करेंगे। चित्र 6·6 में 8 ग्राफ जिनमें प्रत्येक में कालान्तर T/8 है खींचे गये है। प्रत्येक T/8 कालान्तर मे ξ, x ग्राफ की पूर्ण रेखा दाहिनी ओर $\lambda/8$ दूरी आगे बढ़ती है। इसी T/8 कालान्तराल में बिन्दुकित ξ, x वक्र $\lambda/8$ की दूरी से बायीं ओर बढ़ता है। परिणामी वक्र को मणिकामय दिखाया गया है और प्रत्येक x पर ξ_1 तथा ξ_2 को जोड़कर इसे प्राप्त किया गया है। t = 0 पर वक्रों के शीर्ष एक स्थान पर हैं $t=\frac{2T}{8}$ पर उनके शीर्ष एवं गर्त एक स्थान पर हैं और t = 4T/8 पर फिर उनके शीर्ष एक ही स्थान पर है। अतः t = 0 तथा t = 4T/8 पर विस्थापन अधिकतम हैं किन्तु t = 2T/8 तथा 6T/8 पर सभी कण शून्य विस्थापन पर (किन्तु शून्य वेग पर नहीं) हैं।

परिणामी विस्थापन को $t=0, T/8, \frac{2T}{8}\ldots \frac{8T}{8}$ क्षणों पर अलग चित्र 6.8 में दिखाया गया है। यह ध्यान देने योग्य है कि N, N, N पर दोलन का आयाम शून्य है। ये निस्पन्द बिन्दु हैं जहाँ विस्थापन का (और वेग का भी) आयाम शून्य के बराबर है। A, A, A जैसे बिन्दुओं पर आयाम अधिकतम है। इन्हें प्रस्पन्द बिन्दु कहते हैं जहाँ विस्थापन का (और वेग का भी) आयाम अधिकतम है। तार में N तथा A बिन्दुओं के समुच्चय हैं, पानी के पृष्ठ पर अथवा झिल्लिकाओं में रेखाओं के समुच्चय होते हैं एवं आकाश

6.8 चित्र 6.7 का परिणामी वक्र। $\frac{T}{8}$ के अंतराल पर $0\times\frac{T}{8}$ से $8\times\frac{T}{8}$ तक की अवस्थाएं साथ साथ दिखाई गई हैं।

में (जैसे वायु में) वे समतलों के—निस्पंद समतल एवं प्रस्पंद समतल सम्मुच्चय होते हैं।

यह भी ध्यान देने योग्य है कि सभी कणों के महत्तम विस्थापन एक साथ होते हैं, तथा उनका शून्य विस्थापन भी एक साथ होता है। दूसरे शब्दों में x के साथ कला का परिवर्तन नहीं होता, यह सभी स्थानों पर एक ही है और सभी स्थानों के लिये एक साथ इनमें परिवर्तन होता है। इस अर्थ में चलने वाली (अथवा प्रगामी) तरंगों की भाँति इनमें तरंगाग्र जैसी कोई बात नहीं होती।

चित्र (6·7) में मूल बिन्दु $x=0$ को निर्देशित नहीं किया गया है। यह किसी निस्पंद अथवा प्रस्पंद बिन्दु पर हो सकता है। व्यवहार में यह माना जाता है कि विपरीत दिशा में चलती हुई दोनों तरंगें किसी सीमा पर परावर्तन के कारण उत्पन्न होती हैं। परावर्तन ऐसे हो सकते हैं कि धन और ऋण विस्थापनों में परिवर्तन न हों और ऐसे भी हो सकते हैं कि इनमें परिवर्तन हों, अर्थात् धन विस्थापन ऋण और ऋण विस्थापन धन हो जाये। (पाँचवाँ अध्याय देखिये)। पहली स्थिति में सीमा ($x=0$) पर ξ_1 तथा ξ_2 मान सदैव एक ही जैसे होते हैं और उस स्थान पर प्रस्पंद होता है। दूसरी स्थिति में ξ_1 तथा ξ_2 विपरीत चिन्ह के होते हैं और उस स्थान पर निस्पंद होता है।

अप्रगामी तरंग के अभिलक्षण
(Properties of Stationary Waves)

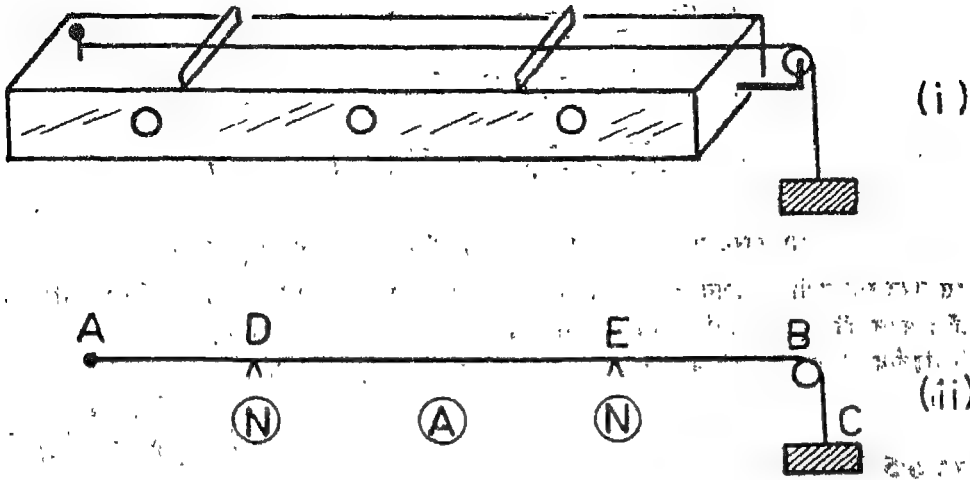
प्रगामी तरंगों में सभी स्थानों पर आयाम एक ही होता है परन्तु विभिन्न बिन्दुओं पर अधिकतम विस्थापन विभिन्न समयों पर होता है। इसके विपरीत आकृति (6·7) तथा (6·8) से स्पष्ट है कि आयाम विभिन्न स्थानों पर भिन्न-भिन्न होता है और निस्पंदों पर शून्य और प्रस्पंदों पर अधिकतम होता है। दो उत्तरोत्तर प्रस्पंदों अथवा दो उत्तरोत्तर निस्पंदों के बीच की दूरी $\lambda/2$ होती है तथा किसी निस्पंद और समीपतम प्रस्पंद के बीच दूरी $\lambda/4$ होती है। सभी बिन्दुओं पर अधिकतम विस्थापन एक ही क्षण पर होता है तथा शून्य विस्थापन भी एक ही क्षण पर होता है, आदि। इसका अर्थ यह है कि दूरी x के साथ कला में परिवर्तन नहीं होता, अर्थात् किसी निश्चित समय पर सभी स्थानों पर एक ही कला होती है।

किसी अप्रगामी तरंग में प्रत्येक चक्र में दो बार माध्यम के सभी स्थानों पर शून्य विस्थापन होता है, अतः स्थितिज ऊर्जा शून्य होती है और तरंग की कुल ऊर्जा गतिज होती है। इसी तरह x प्रत्येक चक्र में दो बार सारे माध्यम में अधिकतम विस्थापन होता है (जो विभिन्न x के लिए भिन्न-भिन्न होता है) और इन क्षणों पर गतिज ऊर्जा शून्य होती है और तरंग की कुल ऊर्जा स्थितिज ऊर्जा के रूप में होती है। अतः अप्रगामी तरंगों में एकान्तर से कुल ऊर्जा पूर्णतः गतिज और पूर्णतः स्थितिज होती है। प्रगामी तरंगों में एक तरंगदैर्घ्य पर औसत लेने से माध्यम में ऊर्जा आधी गतिज तथा आधी स्थितिज होती है।

अनुदैर्घ्य अप्रगामी तरंगों में एक अन्य बात भी होती है। अनुदैर्घ्य तरंगों में दाब का आधिक्य ξ, x वक्र की प्रवणता के अनुपात में होता है (देखें अध्याय 5)। चित्र (6·8) में हम देखते हैं कि यह प्रवणता प्रस्पंद A, A पर शून्य तथा निस्पंद N, N पर अधिकतम होती है। अतः A, A बिन्दुओं पर दाब में कोई परिवर्तन नहीं होता और इन्हें दाब निस्पंद कहा जा सकता है। इसी प्रकार N, N बिन्दुओं पर दाब का परिवर्तन अधिकतम होता है और इन्हें दाब-प्रस्पंद कह सकते हैं।

6·5 तार तथा वायुस्तम्भ में तरंग (Waves in Wire and Air Column)

अनन्त तक लम्बे तार में खुली वायु में तरंगें एक दिशा में अथवा दूसरी दिशा में अपने विशिष्ट वेग के साथ चलती हैं। परन्तु अब हम मेरुओं (वाद्य यंत्रों के) द्वारा सीमित तारों पर तथा नलियों के सिरों द्वारा सीमित वायुस्तम्भों पर विचार करेंगे।

स्वरमापी का तार प्रथम वर्ग का है और इसके विवेचन से सभी तन्तु वाद्यों-सितार, वायलिन, एकतारा आदि को समझने में सहायता मिलती है। अनुनादी वायु स्तम्भ दूसरे वर्ग का है और इसका विवे-

6.9 (i) एक स्वरमापी (ii) इसका व्यवस्था चित्र।

विवेचन बाँसुरी आदि वाद्य यन्त्रों से संबंधित है।

स्वरमापी (Sonometer) : इसमें एक तार ABC होता है जो A पर एक कीलक पर जुड़ा होता है, B पर एक घिरनी के ऊपर से गुजरता है और C पर इससे एक भार लटकाया होता है। दो सरकने वाले सेतुओं D तथा E पर तार टिका होता है और हमारा विवेचन भार के सीमित भाग DE के कम्पन पर होगा। तार के प्रति सेंटीमीटर द्रव्यमान (m) तथा तनाव (T) पर तार में तरंग का वेग c निर्भर करता है। इनका संबंध है $c = \sqrt{\dfrac{T}{m}}$ (6·17)

तार में उत्पन्न कोई क्षोभ D एवं E पर परावर्तित हो जाता है। अतः तार में अप्रगामी कंपन होता है, प्रगामी तरंगें नहीं होतीं।

विपरीत, दिशाओं में चलती हुई तरंगों के अध्यारोपण तथा अप्रगामी तरंगों के बनने के विस्तार में न जाते हुए हम इस तथ्य को एकदम देख सकते हैं कि D तथा E सिरों पर निस्पंद होंगे क्योंकि उन स्थानों पर तार मेरूओं पर टिका हुआ है।

अप्रगामी तरंगों में सरलतम स्थिति जो इन प्रतिबंधों को पूरा करती है यह है कि इन निस्पंदों के बीच में एक प्रस्पंद हो। यदि DE तार की लम्बाई L है तो एक निस्पंद से दूसरे निस्पंद तक दूरी $\lambda/2$ होती है और हम पाते हैं कि $\lambda/2 = L$

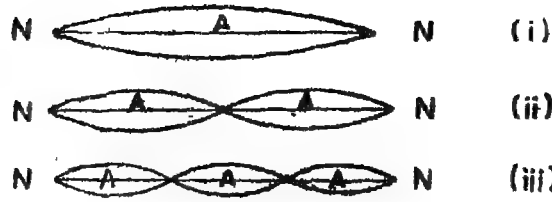
अथवा $\lambda = 2L$

समीकरण (6·17) से हम पाते हैं कि आवृत्ति

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{m}} \qquad (6{\cdot}18)$$

इस तरह किसी दिए तनाव और किसी दिये तार की आवृत्ति लम्बाई की व्युत्क्रमानुपाती होती है। तनाव बढ़ने से c और इस कारण आवृत्ति में वृद्धि होती है। मुख्य बात यह है कि सीमित लम्बाई के तने तार में एक विशेष आवृत्ति पर कम्पन होता है। किसी वाद्य यन्त्र में जिसमें तार लगे होते हैं तार की लम्बाई तथा तनाव पर नियंत्रण करके आवृत्तियों का समुच्चय प्राप्त किया जाता है।

इस प्रतिबन्ध के साथ कि दोनों सिरों पर निस्पंद हों बीच में दो, अथवा तीन अथवा अधिक प्रस्पंद हो सकते हैं। चित्र 6·10 में कुछ स्थितियों को दिखाया गया है। यदि बीच में p प्रस्पंद हों तो तरंगदैर्ध्य $2L/p$ होगा और आवृत्ति होगी

$$\nu_p = \frac{c}{\lambda} = \frac{p}{2L}\sqrt{\frac{T}{m}} = p\nu \qquad (6{\cdot}19)$$

6.10 स्वरमापी के दोलन में मूल दोलन (i) एवं प्रसंवादी दोलन (ii) तथा (iii)

इस तरह स्वरमापी में संभव आवृत्तियाँ ν, 2ν, 3ν...हैं। पहले की मूल आवृत्ति तथा अन्यों को संनादी, द्वितीय संनादी, तृतीय संनादी, आदि कहते हैं।

उदाहरण 6·5

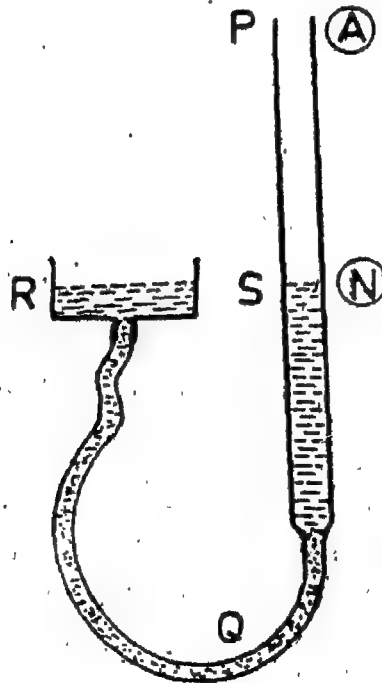
सितार के एक तार पर 40 न्यूटन का तनाव है, सेतुओं के बीच लम्बाई 70 सेमी है। तार के 5 मीटर लम्बे प्रतिदर्श का द्रव्यमान 1·0 ग्राम है। (i) तार पर अनुप्रस्थ तरंगों का वेग (ii) मूल की आवृत्ति, तथा प्रथम दो संनादियों की आवृत्ति निकालिए।

हल : $m = \dfrac{0{\cdot}001 \text{ कि ग्रा}}{5 \text{ मीटर}} = 0{\cdot}0002$ किग्रा/मीटर

$$c = \sqrt{\frac{T}{m}} = \sqrt{\frac{40 \text{ न्यूटन}}{0{\cdot}0002 \text{ किग्रा/मी}}}$$

$$= 4{\cdot}5 \times 10^2 \text{ मी/से}$$

$$\nu = \frac{c}{2L} = \frac{4{\cdot}5 \times 10^2 \text{ मी/से}}{2 \times 0{\cdot}70 \text{ मी}} = 320 \text{ से}^{-1}$$

$\nu_p = p\nu = 640$ से$^{-1}$ तथा 960 से$^{-1}$ ($p = 2$ तथा 3 के लिए)

6.11 अनुनादी वायु स्तंभ

अनुनादी वायु स्तम्भ (Resonating air Column) : यह कांच की उर्ध्वाधर एक नली PQ है (चित्र 6·11) जिसे रबड़ की एक नली के द्वारा एक पानी के एक पात्र R से जोड़ दिया जाता है। R की ऊंचाई में परिवर्तन करके नली में पानी का स्तर S बदला जा सकता है। हमारी अभिरुचि वायु के स्तम्भ PS में है जो नीचे पानी के स्तर से सीमित है तथा ऊपर की ओर मुक्त वायुमण्डल से सीमित है।

वायु स्तम्भ सीमाओं पर प्रतिबन्ध हैं : S सिरे पर निस्पंद क्योंकि नली की वायु की अपेक्षा पानी दृढ़ सीमा है।

P सिरे पर प्रस्पंद क्योंकि खुला वायुमंडल नली की वायु की अपेक्षा मुक्त अथवा ढीली सीमा है। अतः हम S सिरे पर N (निस्पंद के लिए) तथा P सिरे पर A (प्रस्पंद के लिए) लिखते हैं। सरलतम स्थिति में PS लम्बाई में कोई निस्पंद अथवा प्रस्पंद नहीं होगा। अतः यदि स्तम्भ की लम्बाई L है तो

$$\frac{\lambda}{4}=L \text{ अथवा } \lambda=4L \qquad (6{\cdot}20)$$

किसी गैस में ध्वनि का वेग उसके आयतन प्रत्यास्थता गुणांक तथा घनत्व ρ पर निर्भर करता है। इसके लिए न्यूटन का सूत्र है

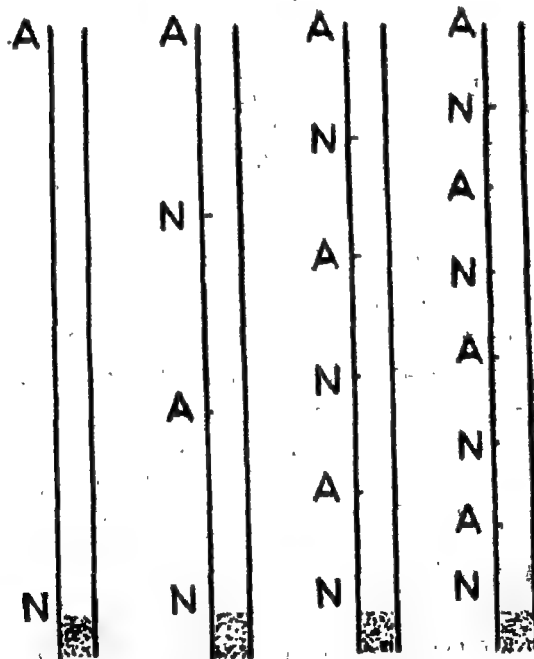
$$c=\sqrt{\frac{E}{\rho}} \qquad (6{\cdot}21)$$

लाप्लास ने सुझाव दिया कि E के लिए रुद्धोष्म प्रत्यास्थता का उपयोग होना चाहिए जिसका मान $P\gamma$ है। अतः

$$c=\sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}} \qquad (6{\cdot}22)$$

इसके उपयोग से अनुनादी स्तम्भ के मूल कम्पन की आवृत्ति है

$$\nu=\frac{c}{\lambda}=\frac{c}{4L}\sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}} \qquad (6{\cdot}23)$$

स्वरमापी में c को परिवर्तित किया जा सकता है। परन्तु यहाँ c को परिवर्तित नहीं किया जा

6.12 अनुनादी वायुस्तंभ में प्रसंवादी

सकता है। अतः हम यही कहेंगे कि आवृत्ति लम्बाई की व्युत्क्रमानुपाती है।[1] साधारण अनुभव यह है कि जैसे-जैसे मर्तबान में पानी डाला जाता है उसकी ध्वनि का तारत्व ऊँचा होता जाता है क्योंकि मर्तबान का वायु-स्तम्भ छोटा होता जाता है। जल तरंग वाद्य के प्यालों को पानी से विभिन्न स्तरों तक भरा जाता है जिससे उनसे सुस्वर आवृत्तियों का समुदाय निकलता है।

वायुस्तम्भ से प्राप्त होने वाले ऊँचे संनादियों को चित्र 6·12 में दिखाया गया है। अंत्य प्रतिबन्धों को पूरा करने के लिए वायु स्तम्भ को 1 या 3 या 5 या...(2p+1) भागों में बाँटा जा सकता है जिसमें प्रत्येक भाग λ/4 है। अतः आवृत्ति का व्यापक सूत्र है :

$$\nu_p = \frac{c}{4L}(2p+1) = (2p+1)\nu \quad (6\cdot24)$$

अर्थात् मूल आवृत्ति के अतिरिक्त हमें तीसरे, पाँचवें...(विषम) संनादी मिलते हैं।

बाँसुरी (Flute) : सीमित वायुस्तम्भ का एक अन्य उदाहरण बाँसुरी है। सरलता के लिए हम पार्श्वस्थित सभी छिद्रों को बन्द मान लेंगे (चित्र 6·13)। बाँसुरी M सिरे से बजाई जाती है। P बिन्दु पर छेद तथा दूसरा सिरा प्रस्पंद है क्योंकि वहाँ पर वायुस्तम्भ मुक्त वायुमंडल से जुड़ता है। इन प्रस्पंदों के बीच में कम से कम एक निस्पंद होना चाहिए। (मूल कंपन की स्थिति), परन्तु 2, 3,...p निस्पंद हो सकते हैं (संनादी कंपन की स्थिति)। पार्श्व छिद्रों का बहुत महत्व है क्योंकि उनकी स्थितियों से यह निश्चित होता है कि किन संनादियों का उत्कर्ष होगा। यह ध्यान देने योग्य है कि जहाँ तक संनादियों का सम्बन्ध है दोनो मे कोई अन्तर नहीं है। केवल सितार के निस्पंद बिन्दु बाँसुरी में प्रस्पंद बिन्दु होते हैं।

6.13 पार्श्व के छेदों की बन्द अवस्था सहित बाँसुरी।

स्वरित्र द्विभुज (Tuning Fork) चित्र (6·14) में एक छड़ को दिखाया गया है जो मध्य बिन्दु पर शिकंजे द्वारा दृढ़ता से कसा हुआ है। यदि इसे इसकी लंबाई की दिशा में मला जाय तो इसके दोनों सिरे मुक्त हैं और मध्य बिन्दु कसा हुआ है। इससे $\nu = \frac{c}{2L}$ जिसमें c छड़ में अनुदैर्ध्य तरंगों का वेग है और जिसका मान $\sqrt{\frac{E}{m}}$ है जहाँ E छड़ के लिए यंग का प्रत्यास्थता गुणांक है तथा m छड़ की इकाई लंबाई का द्रव्यमान है। चित्र 6·15 में यह दिखाया गया है कि स्वरित्र द्विभुज किस प्रकार कंपन करता है। ये अनुप्रस्थ कंपन हैं। मुक्त सिरों पर प्रस्पंद होते हैं और स्तम्भ बिन्दु पर भी प्रस्पंद होता है। बंक के समीप कहीं निस्पंद होता है। आवृत्ति ν के लिए कोई सरल सूत्र नहीं है परन्तु महत्वपूर्ण तथ्य यह है कि इससे शुद्ध स्वर, अर्थात् एक ही आवृत्ति का आवर्ती दोलन, प्राप्त होता है।

6.14 मध्य में शिकंजे में कसे छड़ के लिए $\nu = \frac{c}{2L}$

1. वस्तुतः प्रस्पंद ठीक ऊपरी सिरे पर नहीं होता अपितु सिरे से α ऊँचाई पर होता है, α को अंत्य संशोधन कहते हैं।

6.15 स्वरित्र द्विभुज में न केवल दोनों सिरे प्रस्पंद बिन्दु होते हैं अपितु डंडी का अंतिम बिन्दु भी प्रस्पंद बिन्दु होता है।

अनुनादी प्रयोग (Resonance Experiment) :

स्वरित्र द्विभुज की एक निश्चित आवृत्ति होती है परन्तु स्वरमापी में अथवा अनुनादी वायुस्तंभ मे (चित्र 6·11) L के साथ आवृत्ति परिवर्तित होती है। यदि किसी कंपमान स्वरित्र द्विभुज को इस तरह रखा जाय कि उससे ऊर्जा स्वरमापी में अथवा वायु-स्तंभ में स्थानांतरित हो जाय तो ν_0 से ν के बहुत भिन्न होने पर स्वरमापी अथवा वायुस्तम्भ का विशेष दोलन नहीं होता। जब ν_0 के कुछ पास ν का मान होता है तब इनमें कुछ दोलन होता है। यदि $\nu=\nu_0$ हो तो स्वरमापी तथा वायु स्तंभ द्वारा स्वरित्र द्विभुज के कम्पन सब से अच्छी तरह से ग्रहण किये जाते हैं। इस परिघटना को अनुनाद कहते हैं। हम स्वरित्र द्विभुज को 'चालक' तथा स्वरमापी एवं वायुस्तंभ को 'चालित संयत्र' की संज्ञा देंगे। यदि चालित की आवृत्ति चालक की आवृत्ति के बराबर हो तो इसमें प्रबल दोलन होते हैं। तब हम कहते हैं कि चालक तथा चालित मे अनुनाद है। यह वैसा ही है जैसे हमारे रेडियो के परिपथ में उदाहरण के लिए दिल्ली A स्टेशन के साथ अनुनाद होता है।

स्वरित्र द्विभुज तथा स्वरमापी में अनुनाद के कारण हम लिख सकते हैं कि

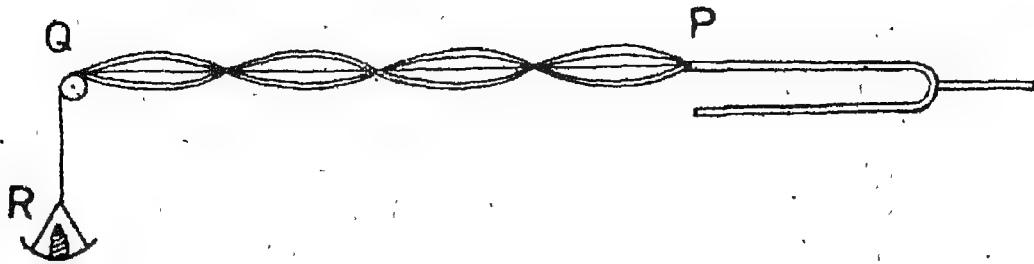
$$\nu_0=\nu=\frac{c}{2L} \qquad (6.25a)$$

जिसमें ν_0 स्वरित्र द्विभुज की आवृत्ति है तथा ν स्वरमापी के तार की आवृत्ति है। चूँकि c का मान तनाव तथा तार के प्रति इकाई लंबाई के द्रव्यमान से ज्ञात किया जा सकता है, इस सूत्र से ν_0 का मान प्रयोग द्वारा ज्ञात किया जा सकता है।

इसी तरह वायु स्तंभ तथा स्वरित्र द्विभुज के बीच अनुनाद (चित्र 6·11) के लिए

$$\nu_0=\nu=\frac{c}{4L} \qquad (6{\cdot}25b)$$

इस स्थिति में ν_0 का मान ज्ञात होने से, वायु में ध्वनि का वेग ज्ञात किया जा सकता है।

मेल्डे का प्रयोग (Melde's Experiment) किसी दिये हुए सूत्र में अग्रगामी तरंगों तथा कई संनादियों की प्राप्ति के लिए यह अच्छा प्रयोग है। इसकी व्यवस्था को चित्र (6.16) में दिखाया गया है। PQR एक नरम सूत्र है। इसके P सिरे को एक विद्युत्-चालित कंपित्र से (चित्र में सरलता के लिए एक स्वरित्र त्रिभुज दिखाया गया है) जोड़ दिया गया है। सूत्र घिरनी Q के ऊपर से गुजरता है और इसके R सिरे से एक भार लटका हुआ है जिसका मान परिवर्तन शील है। किसी प्रयोग में तनाव T (जिसका मान Mg है यदि R पर लटकाया गया द्रव्यमान M है) को परिवर्तनशील और लम्बाई PQ=L को अचर रखा जा सकता है। साधारणतः सूत्र में प्रबल दोलन नहीं होता। परन्तु तनाव के विशेष मानों के लिए इसके दोलन का आयाम बहुत बड़ा होता है। इस सूत्र में 1, 2, 3...p प्रस्पंद (चित्र 6.16 में चार प्रस्पंद है) हो सकते हैं। आयाम ~1 सेमी तक हो

6.16 मेल्डे का प्रयोग

सकते हैं। अतः साधारण लोगों को दिखाने के लिए यह अच्छा प्रयोग है।

कुण्ट की नली (Kundt's tube) : वायु के अतिरिक्त अन्य गैसों में ध्वनि का वेग नापने के लिए कुण्ट की नली का उपयोग किया जाता है (चित्र 6.17)। ABC एक छड़ है जिसे मध्य बिन्दु पर कस दिया गया है और जिसमें अनुप्रस्थ कंपन हो रहे हैं।

6.17 कुण्ट की नलिका

PQ नली में गैस होती है। R एक समंजनशील पिस्टन है। शुष्क लाइकोपोडियम के चूर्ण को नली में रखा होता है। जब ABC के कंपनों एवं नली की गैस के बीच (R को व्यवस्थित करने से) अनुनाद होता है तब चूर्ण छोटी राशियों में, जैसा चित्र में दिखाया गया है, इकट्ठा हो जाता है। इन ढेरों के बीच अंतराल λ/2 है। यदि प्रयोग को पहले वायु के साथ और फिर दी हुई गैस के साथ किया जाय तो

$$\nu(\text{छड़}) = \frac{c\ (\text{वायु में})}{\lambda\ (\text{वायु में})} = \frac{c\ (\text{गैस में})}{\lambda\ (\text{गैस में})}$$

अतः

$$c\ (\text{गैस में}) = c(\text{वायु में}) \times \frac{\lambda\ (\text{गैस में})}{\lambda\ (\text{वायु में})}$$

उदाहरण 6·6.

किसी स्वरमापी के तार की लंबाई 24·7 सेमी हो तो 256 हर्त्स (H_z) आवृत्ति के स्वरित्र द्विभुज के साथ अनुनाद होता है। तार में तरंगों का वेग ज्ञात कीजिये। 453 हर्त्स (H_z) के स्वरित्र द्विभुज के साथ किस लंबाई पर अनुनाद होगा ?

हल :

हम यह मान लेते हैं कि मूल कंपन के साथ अनुनाद हो रहा है।

तब $\nu = \frac{c}{2L}$; $c = 2\nu L$

$= 2 \times 256$ से$^{-1} \times 24{\cdot}7$ सेमी

$= 126$ मी से$^{-1}$

दूसरी स्थिति में यदि अनुनाद की लंबाई L है तो तार में दिये तनाव पर c अपरिवर्तित है

$$\frac{L_2}{L_1} = \frac{\nu_1}{\nu_2}$$

$$\therefore \quad L_2 = 24{\cdot}7 \times \frac{256}{453} \text{ सेमी}$$
$$= 14{\cdot}0 \text{ सेमी}$$

उदाहरण 6·7

एक अनुनादी वायु स्तंभ की लंबाई जब 33·4 सेमी तथा 101·8 सेमी होती है तब $\nu = 256$ हर्त्स (H_z) के स्वरित्र द्विभुज के साथ अनुनाद होता है। (i) अंत्य संशोधन तथा (ii) वायु में ध्वनि की गति ज्ञात कीजिये।

हल :

यदि अंत्य संशोधन α है तथा उत्तरोत्तर अनुनाद की लंबाइयाँ L_1 एवं L_2 और चालक की आवृत्ति ν तो

$$c = 4\nu\,(L_1 + \alpha) = \frac{4\nu}{3}\,(L_2 + \alpha)$$

α ज्ञात करने के लिए हम देखते हैं कि

$$L_1 + \alpha = \frac{L_2 + \alpha}{3}$$

$$\therefore \quad \alpha = \frac{L_2 - 3L_1}{2} = \frac{101{\cdot}8 - 3(33.4)}{2}$$
$$= 0{\cdot}8 \text{ सेमी}$$

इसके पश्चात्

$$c = 4 \times 256(33{\cdot}4 + 0{\cdot}8) \text{ सेमी से}^{-1}$$
$$= 350 \text{ मीसे}^{-1}$$

6.6 दैनिक जीवन में ध्वनि की विशेषताओं पर विचार (Acoustic Considerations in Everyday Life)

ध्वनि के विषय में कुछ व्यापक रुचि के प्रसंगों का संक्षिप्त विवेचन यहाँ किया जायगा। प्रकाश एवं ध्वनि कुछ दूरी से ज्ञान प्राप्त करने के साधन हैं। प्रकाश के लिए मानव को किसी बाह्य स्रोत पर निर्भर रहना पड़ता है, किन्तु ध्वनि के लिए प्रत्येक मनुष्य के पास स्वयं उसकी स्वर तंत्री है जिसमें लगभग अनंत प्रकार की गहनता तथा विभिन्नता है। स्वर तंत्री का अध्ययन शरीर क्रिया विज्ञान में किया जाता है, परन्तु उसके उत्पाद ध्वनि का अध्ययन ध्वनिकी है। हम केवल कुछ स्थूल विशिष्टताओं का उल्लेख करेंगे।

ध्वनि तरंगों की जो आवृत्तियाँ एक सामान्य मनुष्य सुन सकता है उनका फैलाव 20 हर्त्स (H_z) से 20,000 हर्त्स (H_z) तक है। इस परास के बाहर की आवृत्तियाँ सुनी नहीं जा सकतीं। परन्तु इस परास के भीतर की आवृत्तियों के अन्तर को अनुभव करने की पूरी क्षमता कान में है। जिस हम उच्च तार की ध्वनि कहते है। उसकी आवृत्ति ऊँची होती है। मानव की एवं इसके आवृत्ति-अनुभव का अध्ययन बहुत रुचिकर क्षेत्र है। बाह्य कर्ण काफी बड़े क्षेत्र से दोलनों को इकट्ठा करता है और कर्ण पट तक पहुँचाता है जिसका क्षेत्रफल बहुत कम है। उसके बाद किसी प्रकार के अनुनादी है जो विभिन्न आवृत्तियों के लिए संवेदनशील हैं और मस्तिष्क तक संदेश पहुँचाते हैं।

इस सम्बन्ध में यह बात भी दिलचस्प है कि श्रव्य आवृत्तियों का परास सभी कीटों तथा जन्तुओं के लिए वही नहीं है जो आदमियों के लिए है। उदाहरण के लिए चमगादड़ 20,000 हर्त्स (H_z) से बहुत ऊँची आवृत्तियाँ पैदा कर सकते हैं और सुन सकते हैं। वास्तव में वे ध्वनि तरंगों का उपयोग आसपास का ज्ञान प्राप्त करने के लिए आँखों की तरह करते है। यह ज्ञात है कि कुत्ते 20,000 हर्त्स (H_z) से अधिक की आवृत्तियाँ सुन सकते हैं। अतएव शिकारी ऐसी विशिष्ट सीटियों का उपयोग करते हैं जिन्हें आदमी नहीं सुन सकते किन्तु उनके शिकारी कुत्ते सुन सकते हैं।

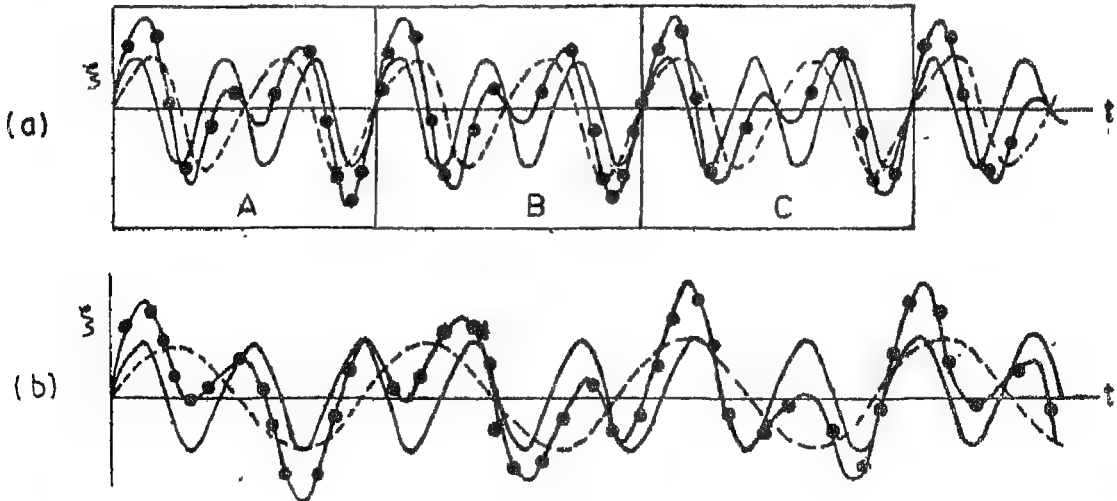
ध्वनि की एक अन्य विशेषता है उसकी तीव्रता अर्थात प्रति सेकिंड प्रति इकाई क्षेत्रफल में ऊर्जा का प्रवाह। मानव कर्ण तीव्रता के बहुत विस्तृत परिसर के लिए संवेदनशील है—क्षीणतम ध्वनि और प्रबलतम ध्वनि के बीच अनुपात 10^{12} का है। इससे अधिक प्रबल ध्वनि से पीड़ा का अनुभव होता है। इसका अनुमान लगाने के लिए इस पर ध्यान देना चाहिए कि एक ओर हम टीन की पत्ती पर थोड़ी ऊँचाई से पानी गिरने की ध्वनि कई मीटर की दूरी

से सुन सकते है, दूसरी ओर लुहार द्वारा बहुत ऊँचाई से गिराये हुए हथौडे की ध्वनि को इतना समीप होते हुए भी वह सहन कर सकता है ।

हमने व्यतिकरण के विषय मे पढा है जो दो तरंगो के बीच कलान्तर पर निर्भर करता है । इसका दैनिक जीवन में जो उपयोग हम करते है वह इस कारण है कि हमारे दो कान हैं । हमारे कानो की अपेक्षा किस दिशा से ध्वनि आ रही है इस बात पर हमारे दोनों कानों तक पहुँचने वाली तरंगो के बीच कला का अन्तर निर्भर करेगा । इसके विपरीत इस कलान्तर का अनुभव करके हमें ज्ञात होता है ध्वनि किस दिशा से आ रही है । वास्तव में हम थोड़ा अपने सिर को घुमाते हैं जिससे कलान्तर में थोड़ा परिवर्तन हो सके और हम अधिक अच्छे निष्कर्ष पर पहुँच सकें ।

पिछले अध्याय में हमने ध्वनि के परावर्तन का उल्लेख किया है । प्रतिध्वनि कदाचित इसका सबसे अच्छा उदाहरण है—दूर की पहाड़ियों से प्रतिध्वनि और दूर की इमारतों से प्रतिध्वनि । किन्तु अधिक महत्वपूर्ण तथ्य यह है कि ध्वनि के उत्पादन तथा प्रतिध्वनि के अभिग्रहण के कालान्तराल से परावर्तक की दूरी ज्ञात की जा सकती है । झीलों तथा समुद्रों की गहराइयाँ इस तरह ज्ञात की जाती हैं एवं जलयान समुद्र के नीचे की चट्टानो की स्थिति का ज्ञान इसी विधि से प्राप्त करते हैं ।[1]

प्रकृति मे चमगादड़ (जो दृष्टिहीन होते है) अपने आसपास का ज्ञान प्राप्त करने के लिए इसी संवेदन युक्ति का उपयोग सदैव करते रहते है ।

संगीत और शोर के बीच का अन्तर भी रोचक है । सुस्वर ध्वनि आवर्ती होती है तथा अनावर्ती ध्वनि शोर होती है । एक शुद्ध ज्यावक्रीय ध्वनि सुस्वर है । यदि सरल आवृत्ति अनुपात की (जैसे 1: 2, 2: 3, 3: 5 आदि) तरंगो का संयोजन हो तो परिणाम फिर भी आवर्ती (देखिये चित्र 6.18a) और इस कारण सुस्वर होता है । परन्तु किसी विषम अनुपात (जैसे 1537 : 1385) की दो ज्यावक्रीय तरंगों का संयोजन हो तो परिणाम अनावर्ती होता है और इस कारण इससे शोर होता है ।

6.18 (a) आवृत्ति के सरल अनुपात (यहां 2 : 3) की तरंगों के संयोजन से आवर्ती दोलन प्राप्त होते हैं । A ; B; C प्रखंड सर्वसम है विषम अनुपात (यहां 10 : 23) को आवृत्ति की तरंगों के संयोजन से जो विक्षोभ मिलता है उसका नमूना थोड़े काल में दोहराया नहीं जाता ।

---

1. वस्तुत: बहुत उच्च आवृत्ति की तरंगों का उपयोग इस कार्य के लिए किया जाता हैं । इन्हें पराश्रव्य कहते है ।

मानव वाणी मे स्वर सुस्वर एवं व्यंजन विस्वर होते है। बाँसुरी की ध्वनि सुस्वर होती है क्योंकि यद्यपि हम इसे मुँह से फूँकते है इसका किसी विशेष आवृत्ति ν और उसके संनादियों पर अनुनाद होता है। ऐसा ही सभी वाद्य यंत्रों मे होता है—यद्यपि ऊर्जा की आपूर्ति आवर्ती नही होती तथापि यंत्र से किसी चुनी हुई आवृत्ति का आवर्ती दोलन प्राप्त होता है। दो अनमेल वाद्य यंत्रों से शोर उत्पन्न हो सकता है। सबसे बुरा शोर होता है जिसमें सभी आवृत्तियाँ मिली रहती है। किसी कारखाने के खड़खड़-टरटर शोर में यही होता है।

चूँकि ध्वनि का अभिलेखन और पुनरुत्पादन बहुत बड़े पैमाने पर किया जाता है। कुछ विशेष महत्व के तथ्यों पर बल देना वाँछनीय है। मनुष्य की वाणी मे जो दोलन होते है वे विस्तृत रूप से फैली आवृत्तियों तथा आयाम के बहुसंख्यक आयामों के संयोजन से बनते हैं। एक उत्कृष्ट युक्ति (रेडियो, टेलीफोन, प्रवर्धक, ग्रामोफोन, आदि) वह है जो इन सभी बातों को ठीक उन्ही अनुपातों में पुनरुत्पादित करती है। इस गुण को तदरूपता कहते है (जिसका अर्थ है यथार्थता)। यदि किसी भी घटक की (जैसे माइक्रोफोन, प्रवर्धक, लाउडस्पीकर) तद्‌रूपता घटिया है तो पुनरुत्पादित ध्वनि मूल ध्वनि के बेमेल होगी। रेडियो में बहुधा एक स्वर नियंत्रक होता है ताकि पुनरुत्पादित ध्वनि में निम्न, मध्य तथा उच्च आवृत्ति के घटकों के आनुपातिक योगदान का समंजन लिया जा सके।

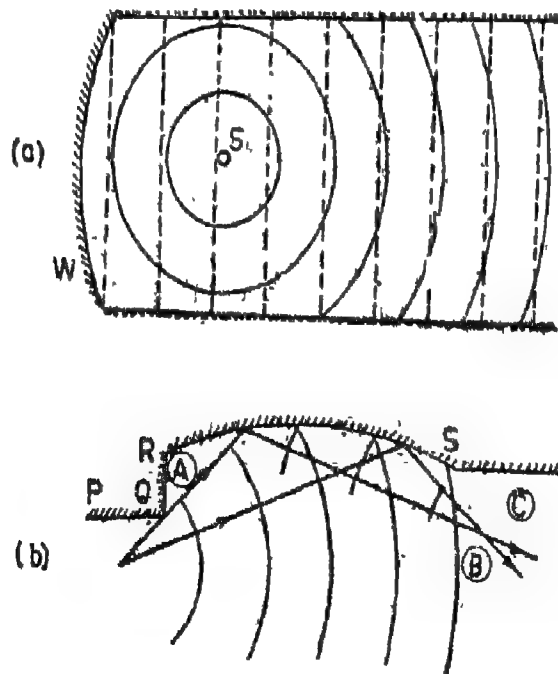
अब हम किसी इमारत की ध्वानिकता पर कुछ ध्यान देगे। एक गुण जो आवश्यक है यह है कि एक कमरे की ध्वनि दूसरे कमरे में न जा सके। होटलों तथा रेडियो स्टेशन के स्टुडियो में इसकी विशेष आवश्यकता है। इसके दीवालों को ध्वनि अवशोधक पदार्थों से अच्छादित कर दिया जाता है और दरवाजों पर मोटे परदे लगा दिया जाते हैं। इसके ठीक विपरीत मर्मरश्रावी गैलरियों का उदाहरण है जिनमें दीवाले इतनी कठोर (और इस कारण अनवशोषक) होती है कि किसी गुम्बज की चारों ओर की बड़ी गैलरी के व्यासतः सम्मुख बिन्दु पर भी मर्मर ध्वनि सुनी जा सकती है।

बड़े सभा-भवनों में प्रतिध्वनि से एक समस्या उत्पन्न हो जाती है। मनुष्य को एक अक्षर बोलने में औसत्‌न लगभग 0·2 सेकिंड लगता है। यदि किसी अक्षर की परावर्तित ध्वनि सुनने वाले के पास उसी समय पहुँचे जब अगले अक्षर की ध्वनि सीधे-सीधे पहुँचती है तो इससे अस्पष्टता उत्पन्न हो जाती है। यदि परावर्तन d दूरी पर की किसी दीवाल अथवा छत से हो रहा हो तो व्यतीतकाल $2d/c$ होगा और हम यह चाहते हैं कि यदि $2d/c$ काल 0·2 सेकिंड से अधिक हो तो दीवालों और छतों को अवशोषक (अर्थात् अपरावर्ती) बनाया जाय।

एक दूसरी समस्या अनुरणन की है। कोई ध्वनि एक बार उत्पन्न होने के पश्चात् बारम्बार कमरे मे अथवा हाल में प्रतिध्वनित होती रहती है और धीरे-धीरे ही समाप्त होती है। यदि कई दरवाजे तथा खिड़कियाँ हों, अथवा अवशोषक दीवालें अथवा भारी पर्दे अथवा मुलायम सजावट के सामान हों तो तेजी से ध्वनि का अवशोषण होता है और वह शीघ्र ही समाप्त हो जाती है। परन्तु किसी सजावटहीन हाल में जहाँ श्रोता भी कम हों तथा खुली खिड़कियाँ भी न हों, तो ध्वनि काफी देर तक बनी रह सकती है। किसी हाल मे ध्वनि की प्राथमिक तीव्रता से 10^{-6} तीव्रता तक गिरने मे जो समय लगता है उसे उस हाल का अनुरणन काल t_R कहते है।[1] ताजमहल के बड़े गुम्बज के लिए इसका मान 20 से 30 सेकिंड तक हो सकता है तथा बड़े होटल के सजे कमरे के लिए 0·2 सेकिंड जितना भी हो सकता है। यदि t_R बहुत छोटा हो तो प्रत्येक अक्षर अलग-अलग स्पष्टता से सुना जा सकता है परन्तु यदि t_R बहुत बड़ा हो तो कई अक्षरों का मिश्रण होने लगेगा और सुनने में अस्पष्टता होगी। अनुभव से यह देखा गया है कि t_R यदि *1.0* सेकिंड हो तो श्रव्यता काफी अच्छी होती है। परन्तु यह केवल एक औसत है। किसी सम्मेलन के लिए t_R का कुछ कम होना वांछनीय है और संगीत समारोह के लिए t_R का मान कुछ अधिक होने से बहुत अच्छा मालूम

1. यह दृष्टव्य है कि प्रतिध्वनि किसी अक्षर की मूल ध्वनि के समाप्त हो जाने पर ध्वनि का लौटना है तथा अनुरणन किसी अक्षर के ध्वनि का कुछ काल तक बना रहना है।

होता है। किसी हाल में यदि t_R बहुत बड़ा हो तो हमें उसमें कालीन, मिथ्या छत, परदो, दीवालों अवशोषक आच्छादन, आदि का उपयोग करना चाहिये। यह भी उल्लेखनीय है कि श्रोताओं की उपस्थिति से भी t_R कम हो जाता है क्योंकि उनसे ध्वनि अवशोषक क्षेत्र-फल—विशेषत: महिलाओं की साड़ियों और शालों से—बढ़ता है।

व्याख्यान देने के लिए किसी कमरे के लिए एक विशेष समस्या होती है कमरे मे ध्वनि का असम वितरण। सम वितरण की एक विधि यह है कि श्रोताओं के सामने की दीवाल W को (चित्र 6.19a) परवलयिक बनाया जाय और वक्ता को उसके फोकस पर रखा जाय। इस दीवाल से परावर्तित ध्वनि सब लोगों तक बराबर-बराबर पहुँचती है (चित्र 6.19a)। यदि अन्य दीवालें वक्रित हो तो उनके द्वारा अनुचित फोकसन हो सकता है। उदाहरण के लिए RS दीवाल से परावर्तित ध्वनि B जैसे क्षेत्र में फोकसित रहती है और C जैसे क्षेत्रों में कम ध्वनि जाती है। कुछ निस्तब्धता केन्द्र भी होते है जहाँ न सीधी ध्वनि पहुँचती है न परिवर्तित ध्वनि आती है। चित्र 6.19b मे ऐसा क्षेत्र A है जहाँ बढ़े हुए भाग Q की छाया पडती है। परन्तु वक्ता से दूर के क्षेत्र मे परावर्तित ध्वनि इतने महत्व की है कि इसके न होने से वहां निस्तब्धता हो सकती है।

6.19 (a) वक्ता के पीछे एक परवलयिक दीवार होने से ध्वनि का वितरण बराबर होता है (b) दूसरी दीवारो की फोकसन क्रिया से अनियमित वितरण होता है।

प्रश्न अभ्यास

6·1 अध्यारोपण के सिद्धान्त को लिखिए। क्या प्रकाश के लिए भी वह लागू है? T तथा T/2 आवर्त-कालों के लिए (ξ, t) के दो ज्यावक्र खींचिये। दूसरे का आयामं पहले के आधे के बराबर लीजिये। कुल 3T काल के लिए (ξ, t) का परिणामी वक्र प्राप्त कीजिये।

6·2 (a) दो व्यतिकरण करने वाले स्रोतों में S_2 की अपेक्षा S_1 कला में 70° द्वारा आगे है। यदि प्रेक्षण का बिन्दु P ऐसा है कि $PS_2 - PS_1 = 1 \cdot 5\lambda$ तो S_1 एवं S_2 से P तक पहुँचने वाली तरंगों की कलाओं का अंतर बताइये। $\phi_1 - \phi_2 = \left(3 + \frac{7}{18}\right)\pi$

(b) दो ऊर्ध्वाधर ऐण्टेनाओं में $\lambda/4$ की दूरी है और उनके दोलनों में $\pi/2$ के तुल्य कलान्तर है। क्षैतिज समतल में तीव्रता के वितरण का विवेचन कीजिये।

6·3 (a) क्विंके की नलिका के प्रयोग में U-नलिका को 30 सेमी खिसकाने पर एक अधिकतम से दूसरे अधिकतम तक पहुँचते है। यदि c=350 मीसे$^{-1}$ तो ध्वनि तरंगों की आवृत्ति तथा तरंगदैर्ध्य निकालिये। (60 से मी; 5.83×10^{-3} से$^{-1}$)

(b) एक ही आवृत्ति के दो स्रोतों के बीच व्यतिकरण होता है। अब एक स्रोत को थोड़ा भारित किया जाता है जिससे इसकी कला $\pi/10$ रेडियन प्रति सेकिंड की दर से पीछे होती जाती है। समय गुजरने के साथ आकाश में किसी बिन्दु पर क्या दिखायी देगा?

6·4 (a) यदि व्यतिकरण करने वाली दो तरंगों के आयाम a_1 तथा a_2 है तथा उनके बीच कलान्तर ϕ है तो सिद्ध कीजिये कि उनके परिणामी कंपन के लिए व्यंजक है:

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos\phi$$

(b) व्यतिकरण करने वाले दो स्रोतों की तीव्रता का अनुपात 16 : 1 है। उनके आयामों का अनुपात और व्यतिकरण में अधिकतम तथा न्यूनतम तीव्रताओं के बीच अनुपात निकालिये।
(4 : 1 ; 25 : 9)

6·5 विवर्तन की परिभाषा लिखिये। ध्वनि के लिए यह क्यों बहुत सामान्य तथा प्रकाश के लिए क्यों बहुत असामान्य है? ऊर्मिका टंकी के प्रयोग (चित्र 6·4) में क्या दिखायी देगा यदि रेखाछिद्र के स्थान पर (1)λ से कम चौड़ाई का अवरोध लगाया जाय (ii) 2 λ के बराबर अवरोध लगाया जाय (यदि आवश्यक हो तो प्रयोग कीजिये)।

6·6 (a) एक सितार के तार और एक तबले को साथ बजाने पर उनके बीच प्रति सकिंड 4 विस्पंद सुनाई पड़ते हैं। आप इससे क्या निष्कर्ष निकालते हैं? तबले के परदे को कसने पर विस्पंद घटते या बढ़ते हैं। इसकी व्याख्या कीजिये।

(b) एक प्रक्षक जो किसी दीवार की ओर 20 मी/से की चाल से जा रहा है अपने पीछे के स्रोत की ध्वनि सीधे स्रोत से तथा दीवार से परावर्तित होने पर सुनता है। इन दोनों ध्वनियों के बीच स्पंद आवृत्ति को निकालिये। यह मान लीजिये कि ठीक आवृत्ति 580 हर्त्स है और c=340 मी/से है। (10 स्पंद/से)

6·7 (a) अपने दोनों कानों की सहायता से हम इस बात का निश्चय कर सकते हैं कि ध्वनि किस दिशा से आ रही है। यह व्यतिकरण के सिद्धान्त पर निर्भर करता है। इसकी व्याख्या कीजिये।

(b) ध्वनि तरंगों को भेज कर तथा किसी वस्तु से प्रकीर्णित ध्वनि की जाँच करना उस वस्तु की स्थिति जानने की एक विधि है। दूरी d का अनुमान कालान्तराल t से किया जाता है। यह समझाइये कि दिशा का अनुमान कैसे किया जा सकता है। इसके अतिरिक्त प्रकीर्णक वस्तु की चाल का अनुमान मूल तरंग तथा प्रकीर्णित तरंग के बीच विस्पंद आवृत्ति स लगाया जा सकता है। (डाप्लर प्रभाव की तुलना कीजिये)। इसकी व्याख्या कीजिये।

6·8 निम्नलिखित समीकरणों को समझाइये जिनमें प्रत्येक एक तरंग को निरूपित करता है।

$\xi_1 = a \cos 2\pi \ (t/T + x/\lambda)$

$\xi_2 = a \sin 2\pi \ (t/T - x/\lambda)$

$\xi_3 = a \cos 2\pi \ (t/T + \frac{x+p}{\lambda} + \phi)$

$\xi_4 = a \cos 2\pi \left(\frac{t}{T+\alpha} + x/\lambda\right), \alpha \gg T$

यह बताइये कि (i) 1 और 2 (ii) 1 और 3 (iii) 1 और 4 (iv) 2 और 3 (v) 2 और 4 (vi) 3 और 4 के अध्यारोपण से व्यतिकरण होगा, विस्पंद होगा अथवा अप्रगामी तरंगे उत्पन्न होंगी।

6.9 अप्रगामी तरंगों में निस्पंद (N) तथा प्रस्पंद (A) की परिभाषा लिखिए। क्या दाब निस्पंद और दाब प्रस्पंद क्रमशः N तथा A के साथ सम्पाती होते हैं ? λ के रूप में निस्पंद और इसके समीपतम प्रस्पंद में कितनी दूरी होती है ? अप्रगामी तरंगों में λ/10 के अंतराल के दो बिन्दुओं में कला का अंतर कितना होता है ?

6.10 (a) किसी स्वरमापी के तार की लंबाई 20 सेमी, तनाव = 20 न्यूटन, तथा द्रव्यमान = $5{\cdot}2 \times 10^{-3}$ किग्रा/मी है : उसकी मूल आवृत्ति की गणना कीजिये। (150 से$^{-1}$)

(b) किसी अनुनादी वायु स्तंभ की लंबाई 17·4 सेमी होने पर वह 512 हर्त्स की आवृत्ति के स्वरित्र द्विभुज के साथ अनुनाद करता है। अंत्य संशोधन को नगण्य मानते हुए वायु मे ध्वनि के वेग की गणना कीजिये। क्या दिये हुए दत्तों के लिए आप का उत्तर अनन्य है ? (356 से मी)

6.11 (a) दोनों सिरों पर खुले 2L लंबाई की नलिका की आवृत्ति वही होती है जो L लबाई की नलिका की होती है जो एक सिरे पर बन्द है। इसको सिद्ध कीजिये। यह भी बताइये कि दोनों नलिकाओं से निकली संपूर्ण ध्वनि क्या बिल्कुल समरूप होगी ?

(b) किसी छड को मध्य में कस दिया गया है। इसके अनुदैर्घ्य कंपन के संभव प्रसंवादियों का विवेचन कीजिये। (i) स्वरमापी (ii) दोनों सिरों पर खुली नलिका के साथ इसकी तुलना कीजिये।

6.12 किसी स्वरित्र द्विभुज में स्तंभ बिन्दु निस्पंद बिंदु नहीं होता। यह परिणाम इस तथ्य से निकलता है कि वियुक्त तंत्र में द्रव्यमान केन्द्र का दोलन नहीं होना चाहिये। इस बात पर विचार कीजिये कि यह तर्क कैसे काम करता है।

6.13 (a) समीकरण (6.15) में ν तथा ν_o दो विभिन्न राशियों को व्यक्त करते है। इसकी आलोचना कीजियें।

(b) मेल्डे के प्रयोग में (चित्र 6.16) कंपित्र से लगा हुआ P सिरा लगभग निसांद बिंदु होता है न कि प्रस्पंद बिंदु यद्यपि ऊर्जा उसी बिन्दु से मिलती है। इसकी व्याख्या कीजिए।

(c) मेल्डे के प्रयोग मे (चित्र 6.14) λ का मान PQ को नाप कर प्राप्त करना चाहिए अथवा किसी दो मध्यवर्ती निस्पंदो के बीच की दूरी को नाप कर प्राप्त करना चाहिए।

6.14 ध्वनि प्रवर्धक तंत्र की दो मुख्य विशेषताएं हैं (i) उच्च अनुक्रिया (ii) तद्रूपता। तद्रूपता के अर्थ तथा महत्व का विवेचन कीजिए। रेडियोग्राही मे स्वर नियंत्रक का क्या प्रकार्य होता है?

6.15 (a) ध्वानिकी के दृष्टिकोण से किसी सभा भवन की त्रुटियों का विवेचन कीजिये।

(b) अनुरणन काल t_R की परिभाषा बताइये। अच्छी श्रव्यता के लिए क्यों इसे न बहुत अधिक न बहुत कम होना चाहिए? संगीत गोष्ठी, व्याख्यान और किसी सभा पर विचार कीजिये। किस के लिए t_R का मान आप थोड़ा अधिक रखना चाहेंगे और किसके लिए थोड़ा कम? कारण बताइये।

अध्याय 7

प्रकाशकीय
(Optics)

इस अध्याय में हम उन प्रयोगों पर विशेष ध्यान देंगे जिनसे यह सिद्ध होता है कि प्रकाश की प्रकृति तरंग जैसी है, अर्थात् इसका ध्रुवण, व्यतिकरण तथा विवर्तन होता है। व्यापक रूप से 'तरंग गति' का अध्ययन करते समय हमने इन्हें पढ़ा है, परन्तु प्रकाश के लिए विशेष रूप से कुछ विस्तार में जाने की आवश्यकता है जिसका विवेचन हम यहां करेंगे। इसके अतिरिक्त हम इस पर भी विचार करेंगे कि किस तरह इस बात की जाँच की जा सकती है कि किसी श्रोत के प्रकाश का विभिन्न तरंगदैर्घ्यों में वितरण किस तरह होता है। सूर्य के प्रकाश के लिए, पारे की विसर्जन नलिका के लिए तथा बुन्सेन ज्वालक की शिखा के लिए यह वितरण बहुत भिन्न होता है। इस अध्ययन से हम प्रकाश-उत्सर्जन प्रक्रम की प्रकृति को समझ सकते हैं जिससे वस्तुतः हम आणविक एवं परमाणविक भौतिकी तक पहुँचते है।

7.1 प्रकाश की प्रकृति (Nature of light)

परछाई के अपने दैनिक अनुभव से हमें प्रकाश के ऋजु रेखीय संचरण का ज्ञान होता है। न्यूटन का प्रस्ताव था कि प्रकाश कुछ कणों का (जिन्हें कणिका कहते हैं) बना है जो स्रोत द्वारा उत्सर्जित होते हैं और पृथ्वी के गुरुत्वीय क्षेत्र से बिना प्रभावित हुए चलते हैं। इस सिद्धान्त को कणिका सिद्धान्त कहते हैं।

हमारे आज के ज्ञान की दृष्टि में इस सिद्धान्त में भारी त्रुटि, प्रकाश के वेग की माप पर आधारित है। यह पाया गया है कि प्रकाश का वेग स्रोत के वेग के ऊपर निर्भर नहीं करता अपितु प्रत्येक माध्यम (और प्रकाश के प्रत्येक रंग के लिए) इसका निश्चित मान होता है। क्या यह हो सकता है कि किसी तरह प्रत्येक स्रोत कणिकाओं को एक ही वेग से उत्सर्जित करता है? किन्तु यह मानना अधिक तर्क संगत होगा कि स्रोत से केवल एक क्षोभ उत्पन्न होता है और संचरण का वेग माध्यम के ऊपर निर्भर करता है न कि स्रोत पर निर्भर करता है।

कणिका सिद्धान्त मे दूसरी कमी ध्रुवण के सिद्धान्तों के कारण दिखायी पड़ती है जिनका वर्णन तरंगों के गमन के अध्याय मे किया गया है। प्रयोगों से पता चलता है कि प्रकाश की प्रकृति अनुप्रस्थ तरंग की तरह है। अनुप्रस्थता का यह गुण 'ईथर' में विस्थापन के कारण है (जैसा पहले के सिद्धान्तों में माना जाता था) अथवा विद्युत् और चुम्बकीय क्षेत्र के सदिशों के कारण है (जैसा विद्युचुम्बकीय सिद्धान्त में माना जाता है) इसका समाधान अन्य प्रयोगों से हो सकता है जिनका वर्णन हम नहीं करेंगे।

तरंगों में व्यतिकरण होता है जो साधारणतः प्रकाश के साथ दिखायी नहीं पड़ता। तरंगें कोनों के गिर्द घूम भी जाती हैं और (विवर्तन) यह भी प्रकाश के साथ साधारणतः दिखायी नहीं पड़ता। सावधानी

से किये प्रयोगों से पता चलता है कि ये दोनों परिघटनाएँ बहुत बड़े पैमाने पर प्रकाश के साथ ठीक उसी प्रकार देखी जा सकती हैं जैसे ध्वनि तरंगों के साथ। अन्तर केवल इतना है कि हमारे अनुभव की दूरियों की अपेक्षा प्रकाश की तरंगें इतनी सूक्ष्म है कि दैनिक अनुभव में ये परिघटनाएं स्पष्ट नहीं होतीं।

7.2 प्रकाश का व्यतिकरण (Interference of light)

जिन बहुत से प्रयोगों के द्वारा प्रकाश का व्यतिकरण देखा जा सकता है उनमें सबसे पुराना और सबसे सरल यंग का दो रेखा छिद्रों का प्रयोग है। चित्र (7.1) में इस व्यवस्था को दिखाया गया है। A प्रकाश के किसी एक रंग (एकवर्णी) का स्रोत है, उदाहरण के लिए सोडियम वाष्प का लैम्प। S~1 मिमी चौड़ा रेखाछिद्र, S_1 एवं S_2~ 0·3 मिमी चौड़े तथा ~ 2 मिमी अंतराल पर रखे दो रेखाछिद्र हैं।

चित्र 7.1. दो रेखाछिद्रों वाला यंग का व्यतिकल प्रयोग

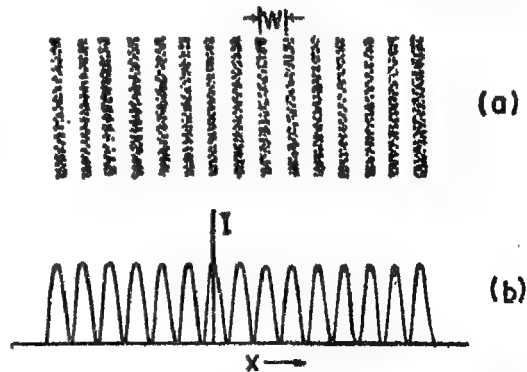
OP प्रेक्षण का समतल है जहाँ S_1 तथा S_2 दोनों से प्रकाश पहुँचता है। SS_1 दूरी ~ 10 सेमी है और S_1O~2 मीटर है।

OP समतल में प्रेक्षण एक नेत्रिका के द्वारा किया जाता है और तब निम्नलिखित तथ्य मिलते है।

(i) यदि केवल S_1 अथवा S_2 खुला हुआ है तो OP जैसे किसी समतल में प्रकाश की तीव्रता एकसमान रहती है।

(ii) यदि S_1 एवं S_2 दोनों खुले है तो OP के साथ-साथ नेत्रिका चलाने पर तीव्रता एकान्तरतः घटती बढ़ती है और हम कहते हैं कि सुदीप्त एवं अदीप्त फ्रिंज दिखायी पड़ रही है (चित्र 7.2)।

(iii) फ्रिंजों की चौड़ाई (चित्र 7.2 में w) दूरी D के अनुपात में और रेखाछिद्रों के अंतराल $S_1 S_2 = d$ की व्युत्क्रमानुपाती है।

प्रेक्षणों की व्याख्या करने के लिए हम मान लेते हैं कि प्रकाश तरंगों का बना है जिनका तरंगदैर्घ्य λ

7.2 यंग के प्रयोग में फिंज : (a) फिंजों का एक गुच्छ (b) फिंजों पर तीव्रता के परिवर्तन का निरूपण।

है। इस स्थिति मे समय के साथ S से तरंगाग्र चलते हैं और S_1 तथा S_2 मे क्षोभ पैदा करते है जहाँ से नये तरंगाग्र चलते है तथा दाहिने हाथ के अवकाश में S_1 एवं S_2 से चले क्षोभों मे व्यतिकरण होता है जिसकी व्याख्या तरंगों के अध्यारोपण के अध्याय में की गयी है। यदि हम प्रेक्षण के समतल मे किसी बिन्दु P पर विचार करे तो वहाँ पहुँचने वाली दो तरंगों के बीच व्यतिकरण पथान्तर $S_2P - S_1P = p$ के ऊपर निर्भर करेगा।

यदि $OP = x$ तथा $S_1S_2 = d$ है[1] तो

$$p = S_2P - S_1P = \frac{xd}{D}$$

यदि S_1 एवं S_2 के कारण P पर विक्षोभ के आयाम अलग-अलग a_1 तथा a_2 हैं तो S_1 एवं S_2 के सम्मिलित प्रभाव से P पर आयाम होगा $(a_1 + a_2)$ यदि पथान्तर λ के पूर्णांक गुणज के तुल्य हो और आयाम होगा $(a_1 - a_2)$ यदि पथान्तर $\lambda/2$ के विषम गुणज के तुल्य हो। अतः प्रेक्षण के समतल पर अधिकतम एवं अल्पतम तीव्रता की स्थितियाँ निम्न नियम से होंगी :

$$\text{अधिकतम} \quad \frac{x_n d}{D} = n\lambda \qquad (7.2a)$$

$$\text{अल्पतम} \quad \frac{x^1_n d}{D} = (n + \tfrac{1}{2})\lambda \qquad (7.2b)$$

आनुक्रमिक अधिकतम तीव्रताओं के अन्तराल से फ्रिंज की चौड़ाई w प्राप्त होती है। अतः

$$w = x_{n-1} - x_n = \frac{D}{d}(n + 1 - n)\lambda$$

$$= \frac{D}{d}\lambda \qquad (7.3)$$

हमने यह मान लिया था कि प्रकाश की प्रकृति तरंग की होती है और तब हम इस निष्कर्ष पर पहुँचे कि प्रेक्षण के समतल में सुदीप्त एवं अदीप्त स्थितियाँ होनी चाहिए। प्रयोगतः परीक्षण से ठीक यही हमें मिलता है। अतः कल्पना संतोषजनक है। हमें प्रायोगिक फल और समीकरण (7.3) के बीच मात्रात्मक संमेल भी मिलता है कि $w \propto D$ तथा $w \propto \frac{1}{d}$। अतः w, d एवं D की माप से हमें मिलता है कि

$$\lambda = \frac{wd}{D} \qquad (7.3a)$$

यह ध्यान देने योग्य है कि व्यतिकरण के प्रयोगों से हमे यह सूचना नहीं मिलती कि तरंगें अनुदैर्ध्य है अथवा अनुप्रस्थ है।

दृश्य प्रकाश के तरंगदैर्ध्य को ऐंगस्ट्रॉम मात्रकों (A°) में लिखने की प्रथा है जो 10^{-10} मीटर के तुल्य है। इस तरह पीत प्रकाश के लिए $\lambda = 6 \times 10^3 A^\circ$ है। दृश्य प्रकाश मे रंग का सम्बन्ध तरंग दैर्ध्य से है : बैंगनी $\sim 4000A^\circ$, हरा $\sim 5600A^\circ$, पीत $\sim 5900A^\circ$ तथा लाल $\sim 7500A^\circ$ परन्तु $\lambda < 4000A^\circ$ का भी प्रकाश होता है जो आँखों से देखा नहीं जा सकता और पराबैंगनी कहलाता है, इसी तरह $\lambda > 7500A^\circ$ का भी प्रकाश होता है। यह भी आँखों से नही देखा जा सकता। इसे अवरक्त प्रकाश कहते हैं। तरगदैर्ध्य मे बहुत नीचे होती है X किरणें (कुछ A°) तथा गामा किरणें ($10^{-4}A^\circ$) और बहुत ऊँची सूक्ष्म तरंगें ($\sim 10^8 A^\circ$) तथा रेडियो तरंगें ($\sim 10^{12} A^\circ$) अर्थात् 100 मीटर। तरंगदैर्ध्य के अतिरिक्त इन सभी की प्रकृति एक सी होती है। सूक्ष्मतरंगों से व्यतिकरण का प्रयोग बहुत सरलता से हो सकता है क्योंकि इनके लिए λ का मान कुछ सेमी होता है। मुख्य बात यह है कि व्यापक रूप से इन सभी तरंगों में व्यतिकरण होता है।

उदाहरण 7.1

यंग के प्रयोग में (चित्र 7.1) यदि $SS_1 - SS_2 = 4.75\lambda$ है तो समीकरण (7.2a,b) के संशोधित स्वरूप को सिद्ध कीजिये।

हल :

P तक पहुँचने वाली तरंगों के पथान्तर की नई परिभाषा है $(SS_2 + S_2P) - (SS_1 + S_1P)$ जिससे मिलता है कि $p = (SS_2 - SS_1) + (S_2P - S_1P)$ इसमें पहले अंश का मान -4.75λ है। ज्यामिति से

1. इसकी व्युत्पत्ति साधारण बीजगणित द्वारा हो सकती है और तरंगों के अध्यारोपण के अध्याय में दी जा चुकी है।

दूसरे भाग का मान (समीकरण 7.1 की तरह) $\frac{xd}{D}$ है।

अतः

अधिकतम तीव्रता के लिए $-4.75\lambda+\frac{xd}{D}=n\lambda$

अथवा $\frac{xd}{D}=(n'+0.75)\lambda$

जिसमे $n'=n+4$ पूर्णांक। इसी तरह अल्पतम तीव्रता के लिए

$$\frac{xd}{D}=(n''+0.25)\lambda$$

जिसमे n'' भी पूर्णांक है।

उदाहरण 7.2

यदि यंग के प्रयोग मे रेखाछिद्रों की चौड़ाइयों का अनुपात 1:9 है तो व्यतिकरण की रचना मे अधिकतम तथा अल्पतम तीव्रताओं के अनुपात को प्राप्त कीजिये।

हल :

अलग-अलग रेखाछिद्रों के कारण तीव्रताओं का अनुपात उनकी चौड़ाइयों के अनुपात में है। आयामों का अनुपात तीव्रताओं के वर्गमूल के अनुपात के तुल्य होता है। यदि इन्हे a_1 एवं a_2 कहें तो

$$a_1 : a_2=\sqrt{1} : \sqrt{9}=1:3$$

अधिकतम आयाम (a_1+a_2) तथा अल्पतम आयाम (a_1-a_2) है। तीव्रताओ का अनुपात उनके वर्ग के अनुपात में होता है। यदि इन्हें I_{max} तथा I_{min} कहें तो हम पाते हैं कि

$$I_{max} : I_{min}=(a_1+a_2)^2 : (a_1-a_2)^2$$
$$=4^2 : 2^2=4:1$$

7.3 कलासंबद्ध स्रोत (Coherent Sources)

यह पूछा जा सकता है कि यदि यंग के प्रयोग में S_1 एवं S_2 को एक ही तरंगदैर्ध्य के दो विभिन्न एकवर्णी स्रोतों, जैसे दो सोडियम लैंपों से प्रकाशित किया जाय तो व्यतिकरण देखा जा सकता है कि नही। इसका प्रयत्न किया गया है किन्तु फल सदैव नकारात्मक रहा है। एक ही आवृत्ति के प्रकाश के दो विभिन्न स्रोतो के बीच व्यतिकरण नही होता।

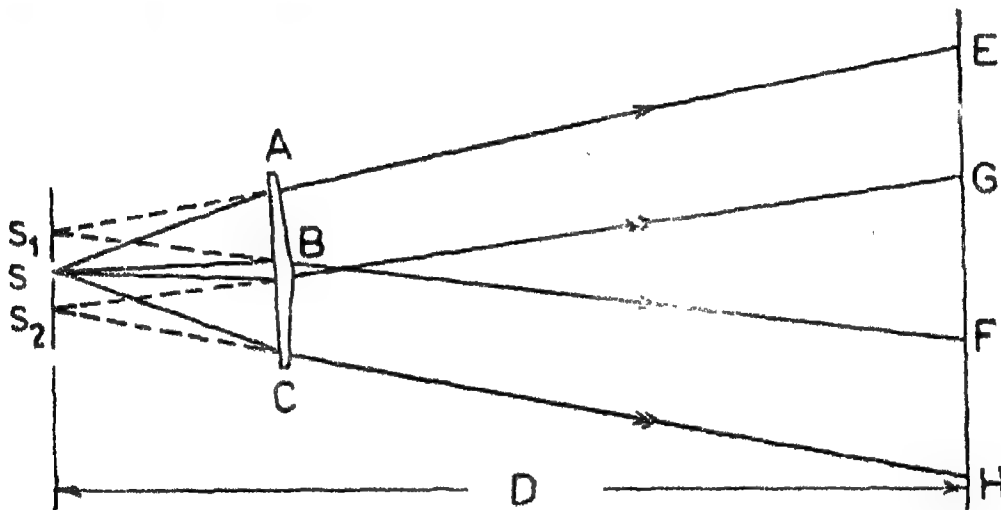
इसका कारण अब ज्ञात है। प्रकाश सारे द्रव्य के एक साथ मिलकर उत्सर्जन से नही अपितु प्रत्येक परमाणु के अलग-अलग उत्सर्जन से उत्पन्न होता है। किसी स्वरित्र द्विभुज की पूरी भुजा एक इकाई की तरह कंपन करती है, किसी बांसुरी मे वायु के सभी अणु एक ही कला मे कंपन करते है। परन्तु सोडियम के लैंप में 1 मिमी³ के आयतन में सोडियम वाष्प के 10^{-5} वायुमंडलीय दाब पर सोडियम के $\sim10^{11}$ परमाणु होते हैं तथा उनमें से प्रत्येक से प्रकाश का उत्सर्जन स्वतंत्र रूप से होता है।[1] अतएव प्रकाश के लिए अरबों परमाणु स्रोत का कार्य करते है जो प्रकाश का उत्सर्जन एक ही कला में नहीं करते। प्रकाश के दो स्वतंत्र स्रोतों के बीच अचर कलान्तर का कोई अर्थ नहीं है क्योंकि इनमें वस्तुतः अरबों परमाणुओं के दो विभिन्न समूह होते है। जिस प्रकथन पर समीकरण (7.2) की उपपत्ति आधारित है उसमे हमने माना था कि S_1 तथा S_2 के बीच कलान्तर शून्य अथवा 2π का पूर्णांक गुणज है। यदि कलान्तर कुछ दूसरा, जैसे ϕ हो तो भी हम समीकरण (7.2) का संशोधन करके अधिकतम तथा अल्पतम को ज्ञात कर सकते हैं। परन्तु यदि ϕ में परिवर्तन अनियमित हो तो अधिकतम एवं अल्पतम की स्थितियों में परिवर्तन भी अनियमित होगा और व्यतिकरण को देखा नही जा सकता।

यंग की युक्ति में (चित्र 7.1) S_1 एवं S_2 दोनों स्रोतो को रेखाछिद्र S से प्रकाश मिलता है। अतएव किसी एक में कला का जो भी परिवर्तन होता है वही दूसरे में भी होता है। (स्रोतों के अरबों परमाणुओं से) S_1 तक जो अरबों तरंगें पहुँचती हैं ठीक उनका सर्वसम समूह S_2 तक भी पहुँचता है क्योंकि तरंगों के सभी युग्मों में आपेक्षिक कलान्तर एक ही होता है। स्रोतों का ऐसा युग्म जिनके लिए कलान्तर

1. गत कुछ वर्षों में लेसर का विकास हुआ, इसमें परमाणुओं द्वारा प्रकाश का उत्सर्जन स्वतंत्र (स्वतः) नहीं होता, अपितु एक संकेत द्वारा नियंत्रित (प्रेरित) होता है।

अचर होता है **कलासंबद्ध स्रोत युग्म** कहलाता है। यह कहा जाता है कि S_1 तथा S_1 कला संबद्ध हैं। व्यतिकरण होने के लिए प्रयुक्त स्रोतों को कला संबद्ध होना चाहिए, अर्थात् उनमे अचर कला का संबन्ध होना चाहिए। प्रकाश के लिए दो स्वतंत्र स्रोत कला संबद्ध नही हो सकते।

फ्रेनल-द्विप्रिज्म विधि (Frenel's Biprism Method) फ्रेनल ने **द्विप्रिज्म विधि** से दो कला संबद्ध स्रोतों को प्राप्त किया जिसे चित्र (7.3) में दिखाया गया है। बायीं ओर के स्रोत द्वारा प्रकाशित रेखाछिद्र S है। बायीं ओर के एक स्रोत द्वारा प्रकाशित रेखाछिद्र S_2 है। काँच की एक साधारण पट्टिका जिसका नीचे का पृष्ठ कृष्णित किया होता है 'दर्पण' का कार्य करती है (यह रजतित दर्पण नही होता) जिससे प्रक्षण समतल के AB क्षेत्र पर आभासी प्रतिबिम्ब S' से परावर्तित प्रकाश तथा स्रोत S से सीधा प्रकाश दोनों ही पड़ते हैं। इस क्षेत्र में व्यतिकरण की फ्रिंजें बनती हैं जिसके लिए S तथा S' कला संबद्ध स्रोत है।

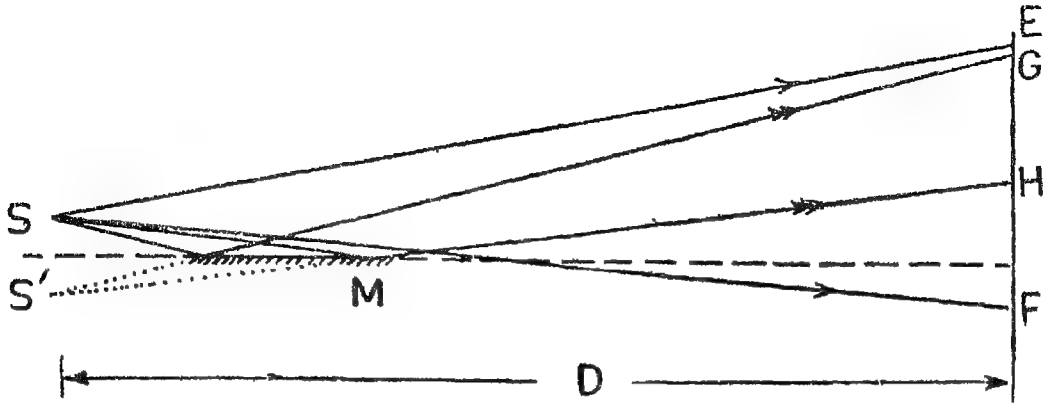
यंग का द्विरेखाछिद्र, फ्रेनल का द्विप्रिज्म, तथा लायड का दर्पण इन सभी के लिए फ्रिंजों की प्रकृति

चित्र 7.3 व्यतिकरण के लिए दो कला सम्बद्ध स्रोत प्राप्त करने के लिए फ्रेनेल की द्विप्रिज्मी विधि।

है। प्रकाश द्विप्रिज्म ABC से गुजरता है जिसके ऊपरी और नीचे के अंश क्रमशः दो आभासी स्रोत S_1 तथा S_2 उत्पन्न करते हैं जिससे द्विप्रिज्म की दाहिनी ओर वस्तुतः प्रकाश S से नहीं अपितु S_1 एवं S_2 से आता है। प्रेक्षण समतल में क्षेत्र GF में S_1 तथा S_2 दोनों से प्रकाश आता है और इस क्षेत्र में व्यतिकरण होता है।

लॉयड का दर्पण (Loyd's Mirror) : कला संबद्ध स्रोत प्राप्त करने की यह एक अन्य व्यवस्था (चित्र 7.4) और उनकी चौड़ाई के व्यंजक एक ही होते हैं और इन्हें चित्र (7.2) एवं समीकरण (7.2) में दिखाया गया है।[1] जब सिद्धान्त का विवेचन होता है तब इन्हें पहले ही नाम से पुकारा जाता है यद्यपि प्रयोगशाला में अन्य दो विधियों के फ्रिंजों की तीव्रता अधिक अच्छी होती है।

उदाहरण 7.3

लॉयड के दर्पणीय व्यतिकरण के प्रयोग में रेखा-

1. बहुत सी अन्य विधियाँ भी हैं।

चित्र 7.4 कला संबद्ध स्रोत तथा व्यतिकरण प्राप्त करने के लिए लायड की दर्पण विधि।

छिद्र तथा इसके प्रतिबिंब में अंतराल 4.32 मिमी है और 2.00 मी की दूरी पर के समतल में प्रेक्षित फ्रिंजों का अंतराल 0.260 मिमी है। प्रकाश के तरंगदैर्ध्य की गणना कीजिये।

हल :

समीकरण (7.3a) से $\lambda = \frac{wd}{D}$। यहाँ दिये मानों से

$$\lambda = \frac{0.0260 \text{ से मी} \times 0.432 \text{ से मी}}{200 \text{ सेमी}}$$

$$= \frac{2.60 \times 4.32}{2\ 00} \times 10^{-5} \text{ सेमी}$$

$$= 5.62 \times 10^{-5} \text{ सेमी}$$

उदाहरण 7.4

द्विप्रिज्म के प्रयोग में प्रकाश का तरंगदैर्ध्य = 5893 A°, d = 4.00 मिमी, D = 1.50 मी है। रेखाछिद्र की अधिकतम चौड़ाई क्या होनी चाहिए कि फ्रिंजें विलुप्त न हो जायें ?

हल :

यदि रेखाछिद्र चौड़ा हो तो इसके अलग-अलग भागों के लिए फ्रिंजें बनेंगीं जो उतनी ही मात्रा में एक ओर हटी होंगी फ्रिंजें तब विलुप्त होंगी जब रेखाछिद्र की चौड़ाई ∧ फ्रिंज चोड़ाई हो जायेगी। इन दत्तों से

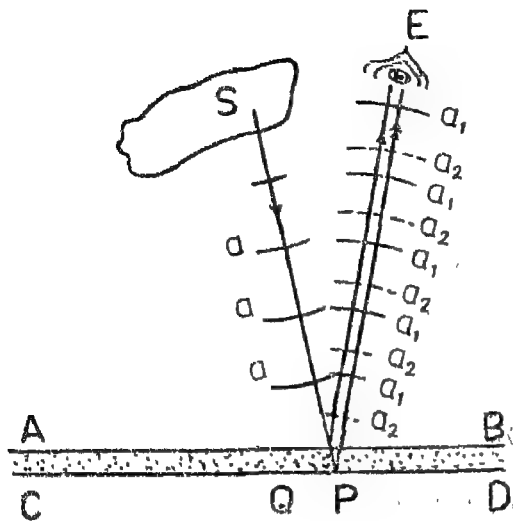
$$w = \frac{\lambda D}{d} = \frac{5.893 \times 10^{-5} \text{सेमी} \times 150 \text{ सेमी}}{0.400 \text{ सेमी}}$$

$$= 0.22 \text{ मिमी।}$$

अतः रेखाछिद्र की चौड़ाई ~ 0.2 मिमी से अधिक नहीं होनी चाहिए।

7.4. तनु फिल्मों के रंग (Colour of Thin Films)

साबुन की किसी फिल्म को परावर्तित प्रकाश में देखने पर सुन्दर रंग दिखायी पड़ते हैं। बरसात के मौसम में सड़क पर के गड्ढों मे जमा पानी पर गुजरने वाली मोटरगाड़ियों से थोड़ी तेल की बूँदें गिर जाती है और तब पानी के पृष्ठ पर बनी तेल की फिल्मों से मनोहर रंग बनते है। जैसा हम देखेंगे इस परिघटना की पूरी व्याख्या प्रकाश के व्यतिकरण से हो जाती है।

चित्र (7.5) में AB तथा CD दो पृष्ठों के बीच किसी माध्यम की पतली परत परिबद्ध है जिसका अपवर्तनांक μ है। E प्रेक्षक का नेत्र है और इससे

चित्र 7.5 पतली परती के रंगों की व्याख्या

पीछे की ओर रेखा खोचने पर हम देखते है कि P के समीप के क्षेत्र का प्रेक्षण करने के लिए स्रोत को PS रेखा में होना चाहिये । किन्तु S से आने वाला प्रकाश अंशत: AB पृष्ठ द्वारा और अंशत: CD पृष्ठ द्वारा परावर्तित होता है । ये दोनों परावर्तित किरणपुंज a_1 एवं a_2 कलासंबद्ध हैं क्योंकि वे दोनों ही एक ही मूल प्रकाश के फिलम के दोनों पृष्ठों से आंशिक परावर्तन से प्राप्त होते है । इसी प्रकार फिलम के प्रत्येक क्षेत्र से आँखों तक दो कला सवद्ध किरणपुंज आते है और उनमें व्यतिकरण होता है ।

दोनों परावर्तित तरंगों में कलान्तर ϕ पथान्तर का $\frac{2\pi}{\lambda}$ गुना होता है । सुविधा के लिए हम विवेचन को फिलम पर लगभग अभिलम्ब दिशा में आपतित प्रकाश तक सीमित रखेंगे । (चित्र 7.5) में नमित आपतन को स्पष्टता के लिए दिखाया गया है । इस स्थिति में यदि P पर फिल्म की मोटाई t है तो फिलम के माध्यम में पथान्तर 2t है । चूँकि माध्यम मे प्रकाश का वेग मुक्त अवकाश में वेग का $\frac{1}{\mu}$ गुना है, माध्यम में 2t के तुल्य पथ मुक्त अवकाश में $2\mu t$ के तुल्य है । अतः

$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda}\, 2\mu t = \frac{4\pi\mu}{\lambda}\, t \qquad (7.4)$$

जिसमे λ मुक्त अवकाश मे प्रकाश का तरंगदैर्ध्य है । अत: अधिकतम तथा अल्पतम के प्रतिबंधों को हम तुरत लिख सकते हैं कि

$$\frac{4\pi\mu}{\lambda}\, t = 2n\pi \qquad (7.5a)$$

$$\frac{4\mu\pi}{\lambda} t = (2n+1)\pi \qquad (7.5b)$$

हमने यह नहीं कहा है कि कौन सा समीकरण अधिकतम के लिए और कौन सा अल्पतम के लिए है । इसका एक कारण है, अधिकतम के लिए समीकरण (7.5a) लागू होना चाहिये, परन्तु यदि दोनों परिवर्तनों के बीच π परिमाण में कला परिवर्तन हो और यह प्राप्त पथान्तर के अतिरिक्त हो, तो स्थिति में परिवर्तन हो जायेगा । हम जिस विशेष स्थिति का अध्ययन कर रहे हैं उसके लिए उपरी पृष्ठ से परावर्तित तरंगों के लिए π परिमाण में कला का परिवर्तन होता है परन्तु नीचे के पृष्ठ से परावर्तन के लिए ऐसा कोई परिवर्तन नहीं होता । अत: समीकरण (7.5a) से अल्पतम तथा समीकरण (7.5b) से अधिकतम तीव्रता मिलती है । अतः हम लिख सकते हैं कि

अधिकतम के लिए

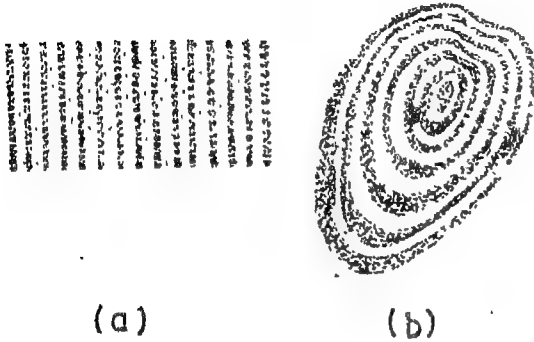
$$2\,\mu\, t_{max} = (n + \tfrac{1}{2})\,\lambda \qquad (7.6a)$$

अल्पतम के लिए $2\,\mu\, t_{min} = n\lambda$ (7.6b)

हम यह पुनः कहते है कि ये समीकरण परावर्तन पृष्ठ की ओर प्रेक्षण के लिए तथा लगभग अभिलम्ब दिशा में प्रेक्षण के लिए लागू हैं ।

यदि वह प्रकाश जिसमे फिल्म को देखा जा रहा है एकवर्णी (एक λ) है तो समीकरण (7.6) से स्पष्ट है कि t के परिवर्तन के अनुसार हमें एकान्तर से सुदीप्त एवं अदीप्त फ्रिंजें दिखेंगीं । किसी पन्नी के लिए फ्रिंजों का स्वरूप सीधी रेखाओं का होता है परन्तु साधारणत: वे पूर्णत: अनियमित होता है ।

यदि तनुफिलम को परावर्तित श्वेत प्रकाश में देखा जाय जहाँ λ का परिवर्तन $\sim$ 4500A° से 7500A° तक होता है तो फिलम पर रंगीन फ्रिंजे दिखायी पड़ती

हैं। इसका कारण यह है कि विभिन्न वर्णों के लिए सुदीप्त फ्रिज विभिन्न स्थानों पर होती है। उदाहरण के लिए यदि किसी स्थान पर $2\mu t$ का मान लाल रंग ($7500A^\circ$) के लिए 1λ हो तो वहाँ नीले ($5000A^\circ$) के लिए मान 1.5λ होगा। अतः इस स्थान पर नीले

चित्र 7.6 तनुफिल्मों में व्यतिकरण की फ्रिज (a) पच्चीनुमा फि म के लिए (b) अनियमित रूप से परिवर्तनशील मोटाई की फिल्म के लिए.

रंग का अधिकतम परावर्तन होगा किन्तु लाल रंग का परावर्तन कुछ नहीं होगा और बीच के रंगों का योगदान इनके बीच का होगा। किसी दूसरे स्थान पर यदि-$2\mu t = 10{,}000A^\circ$ है, तो $\lambda = 5000A^\circ$ के लिए यह 2λ है तथा $\lambda = 6667A^\circ$ के लिए 1.5λ है, अतः इस स्थान पर लाल रंग का जरा भी परावर्तन होता और नारंगलाल का परावर्तन सबसे अच्छा होता है।

यह ध्यान देने योग्य है कि यहाँ रंग विलगित नहीं होते अर्थात् प्रत्येक स्थान पर रंगों का मिश्रण होता है तथा विभिन्न स्थानों पर मिश्रण की संरचना अलग अलग होती है। इस कारण देखने पर रंग बहुत चटकीला एवं प्रभावोत्पादक वर्ण का (विभिन्न रगतों का) होता है। परन्तु यदि फिल्म की मोटाई बहुत अधिक (उदाहरण के लिए 20λ) हो तो इतने रंग मिश्रित हो जाते है कि सब जगह परिणाम श्वेत प्रकाश जैसा हो जाता है, अतः फ्रिंजें दिखाई नहीं पड़ती।

उदाहरण 7.5

साबुन की ऊर्ध्वाधर दिशा में रखी फिल्म को परावर्तित श्वेत प्रकाश में देखने पर शीर्ष भाग में लाल फ्रिज, बीच में 3 लाल फ्रिजें और सबसे नीचे नीली फ्रिज दिखायी पड़ती है। तब फिल्म शीर्ष स्थान से टूट जाती है। $\lambda_{red} = 6500A^\circ$, $\lambda_{blue} = 5000A^\circ$ तथा $\mu = 1.33$ मान कर फिल्म के अधोभाग की मोटाई की गणना कीजिये।

हल :

उच्चतम लाल फ्रिज के लिए

$$2\mu t = (0 + \tfrac{1}{2})\,\lambda_{red}$$

जिसमे n का मान शून्य इसलिए रखा गया है कि फिल्म तुरन्त टूट जाती है। अतः निम्नतम लाल फ्रिज के लिए

$$2\mu t' = (3 + \tfrac{1}{2})\,\lambda_{red} = 3.5 \times 6500A^\circ$$
$$= 22750A^\circ$$

अधोभाग का रंग नीला है। अत. वहाँ

$$2\mu t'' = (n + \tfrac{1}{2})\,\lambda_{blue} = (n + \tfrac{1}{2})\;5000A^\circ$$

चूँकि t'' का मान t' से अधिक है, अत. n का न्यूनतम मान 5 है। इससे मिलता है कि

$$2 \times 1.33t'' = 5.5 \times 5000A^\circ$$
$$t'' = 1.0 \times 10^{4}A^\circ = 1.0 \times 10^{-4}\text{सेमी}$$

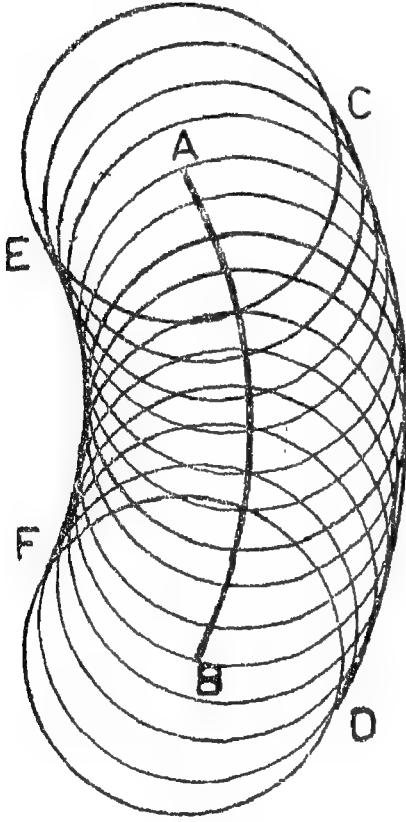
7.5 परावर्तन तथा अपवर्तन के नियम (Laws of Reflection and Refraction)

तरंग गमन के अध्याय में हमने प्रयोगतः देखा है कि दो माध्यमों की सीमा पर तरंगाग्र किस प्रकार परावर्तित तथा अपवर्तित होते हैं। हमने इस बात की कोई सैद्धान्तिक व्याख्या नही दी कि क्यों किसी आपतित तरंगाग्र की दिशा में परावर्तन एवं अपवर्तन के कारण परिवर्तन होता है अथवा किसी विशेष रूप से उसकी शक्ल बदलती है। जब प्रकाश के तरंग सिद्धान्त का प्रतिपादन किया गया तब इसके विरुद्ध एक तर्क यह था कि तरंगें फैलती हैं तथा परावर्तन अथवा अपवर्तन होने पर उनकी कोई सुनिश्चित दिशा नहीं होती जब कि प्रकाश द्वारा सब मिला कर इन नियमों का पालन होता है। सबसे पहले हाइगेन्स ने उचित सैद्धान्तिक व्याख्या की कि तरंगों को भी सब मिला कर इन नियमों का पालन करना चाहिये।

हाइगेन्स की रचना (Huygens' Construction)

हाइगेन्स ने दो निम्नलिखित अभिधारणाएँ की :

(1) तरंगाग्र का प्रत्येक बिन्दु द्वितीयक तरंगिकाओं का नवीन स्रोत बनता है। ये तरंगिकाएँ माध्यम में प्रकाश के वेग से चलती है।

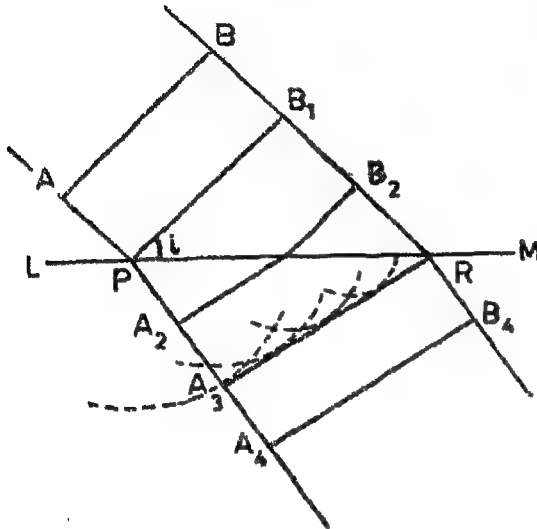
(2) किसी परवर्तीक्षण पर तरंगाग्र उस क्षण की द्वितीयक तरंगिकाओं के अग्रवर्ती आवरण से बनता है।

चित्र (7.7) हाइगेन्स की रचना। $t=t_0$ पर AB तरंगाग्र है। AB के सभी भागों से $c\Delta t$ अर्धव्यास के गोलक खींचे जाते है। आवरण $t_0+\Delta t$ क्षण पर तरंगाग्र है। नया तरंगाग्र EF है या CD ? (वर्णन देखिये)

चित्र (7.7) मे किसी क्षण t_0 पर तरंगाग्र AB पर है। AB के विभिन्न बिन्दुओं $c\ \Delta t$ अर्धव्यास के गोलक खींचे जाते हैं और दो आवरण CD एवं EF मिलते है। $t_0+\Delta t$ क्षण पर CD एव EF में कोई एक तरंगाग्र हैं। यह इस पर निर्भर करता है कि AB दाहिनी ओर अथवा बायी ओर जा रहा था। यह तुरत ध्यान में आयेगा कि किसी एक आवरण को अस्वीकृत कर देना तर्कयुक्त नहीं है। यह भी देखा जायेगा कि द्वितीयक तरंगिकाओं के सब भागों की पूर्णतः उपेक्षा कर दी जाती है और केवल अग्रवर्ती आवरण पर पड़ने वाले भाग को उपयोगी माना जाता जाता है। गणितीय सिद्धान्त में दोनों आपत्तियों का निराकरण हो जाता है परन्तु अभी हम उसका वर्णन नही करेंगे। ध्यान देने की तीसरी बात यह है कि A तथा B दोनो सिरों पर आवरण अनिश्चित रहता है। यही वे स्थान है जहाँ प्रकाश के तरंग माडल एवं किरण माडल में अन्तर होगा। किरणों के किसी शंकु की सीमायें सुस्पष्ट एवं सुनिश्चित होती हैं। किसी सीमित चौड़ाई के तरंगाग्र में सीमाएँ सुस्पष्ट एवं सुनिश्चित नहीं होती।। अभी हम अग्रवर्ती आवरण के सुनिश्चित भाग पर ही विचार करेंगे जो हाइगेन्स के सिद्धान्त के अनुसार नया तरंगाग्र है।

अब हम परावर्तन तथा अपवर्तन के नियमों को प्राप्त करने के लिए हाइगेन्स की विधि का उपयोग करेंगे। उदाहरण के रूप में इनमें से केवल दूसरे का विवेचन किया जायेगा।

अपवर्तन के नियम (Laws of Refraction) : कल्पना की कि चित्र (7.8) में LM दो माध्यमों के बीच कोई समतल पृष्ठ है। इसके ऊपर के माध्यम में प्रकाश का वेग c तथा नीचे के माध्यम मे वेग c' है। LM पृष्ठ की ओर जाने वाले समतल तरंगाग्र के AB भाग पर विचार करें। यह सबसे पहले P बिंदु पर LM से मिलेगा। और फिर R की ओर उत्तरोत्तर बिन्दुओं पर पड़ेगा। LM के प्रत्येक बिंदु से द्वितीयक तरंगिकाएँ दोनों माध्यमों में बढना प्रारंभ करती है। परन्तु अभी हम केवल दूसरे माध्यम की तरंगिकाओ पर विचार करेंगे जो c' वेग से बढ़ती हैं। जिस क्षण पर R बिन्दु पर विक्षोभ पैदा ही हुआ है उस क्षण पर P से निकली

तरंगिकाओं को बढ़ने के लिए B_1R/c काल मलता है और उनका अर्धव्यास

$$PA_3 = \frac{B_1R}{c}c'$$

चित्र 7. 8 अपवर्तन के नियमों का निगमन

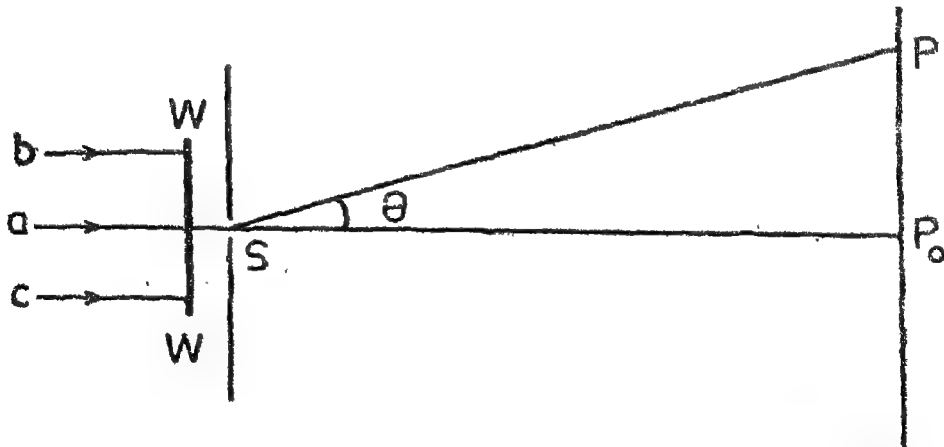
के बराबर होता है। अतः हम P केन्द्र से PA_3 अर्धव्यास का वृत्त खींचते हैं जो इस तरंगिका का निरूपण करता है। R से इस वृत्त पर स्पर्श रेखा RA_3 खींची जाती है। P तथा R के बीच के बिन्दुओं से हम उचित अर्धव्यास के असंख्य वृत्त खींच सकते हैं और RA_3 उन सभी के लिए सर्वनिष्ठ स्पर्श रेखा होगी। अतएव RA_3 हाइगेन्स की तरंगिकाओं का अग्रवर्ती आवरण एवं अपवर्तित तरंगाग्र है।

PB_1R तथा PA_3R त्रिभुजों से हम पाते हैं कि

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{B_1R/PR}{PA_3/PR} = \frac{B_1R}{PA_3}$$

समीकरण (7.7) के उपयोग से

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{c}{c'} = \text{अचर} \tag{7.8}$$

इस तरह प्रकाश के तरंग मॉडल पर स्नेल के अपवर्तन के नियम का निगमन किया जा सकता है। विशेष महत्व की बात यह है कि प्रकाश के किरण मॉडल में ज्याओं के अचर अनुपात को केवल अपवर्तनांक μ का नाम दिया गया था, अब हम जानते हैं कि इसका संबंध सीधे तरंगवेग से है।[1]

चित्र 7.9 एक पतले रेखाछिद्र के भीतर से प्रकाश के गमन की समस्या। क्या P बिन्दु तक कोई प्रकाश पहुंचेगा ?

1. यह ध्यान देने योग्य है कि कणिका सिद्धान्त में अपवतन के समय किरण पथ के बंकन की व्याख्या यह मान कर की गयी थी कि दूसरे माध्यम द्वारा कणिकाओं का आकर्षण होता है। इससे c' का मान c से अधिक आता है और इस सिद्धान्त की प्रागुक्ति थी कि $\mu = \frac{c'}{c}$। अब विभिन्न माध्यमों में प्रकाश के वेग की माप प्राप्त है और परिणाम (7.9) के पक्ष में में मात्रात्मक साक्ष्य है।

$$\mu = \frac{c}{c'} \qquad (7.9)$$

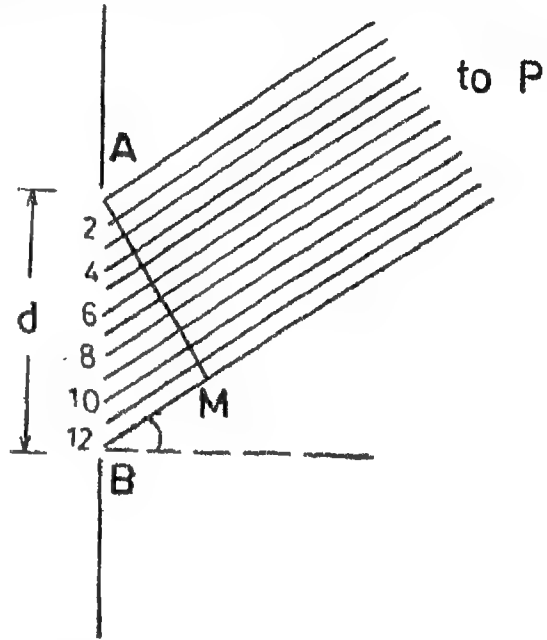
वास्तव में अपवर्तन का एक अन्य नियम भी है : अपवर्तित किरण उसी समतल में होती है जिसमे आपतन बिन्दु पर पृष्ठ पर अभिलंब एवं आपतित किरण होती है। संक्षेप मे इसकी औपचारिक उपपत्ति इस प्रकार हे। चित्र (7.8) में आपतित तरंगाग्र AB विभाजक पृष्ठ LM तथा अपवर्तित तरंगाग्र A_3R सभी कागज के समतल के अभिलम्ब हैं। अत: आपतित तरंगाग्र का अभिलम्ब, पृष्ठ का अभिलम्ब एव अपवर्तित तरंगाग्र का अभिलम्ब सभी एक ही समतल में होते है जो कागज का समतल है।

7.6 प्रकाश का विवर्तन (Diffraction of Light)

अब हम प्रकाश के संचरण की उस स्थिति पर विचार करेंगे जब तरंगाग्र सीमित चौड़ाई का होता है। चित्र (7.9) से समस्या स्पष्ट है। S एक पतला रेखाछिद्र है जिससे होकर प्रकाश बायें से दायें जाता है किरण माडल में a के समीप एक पतला अंश रेखा छिद्र से गुजर कर P_o तक पहुँचता है और दूर के बिन्दु P तक कोई प्रकाश नहीं पहुँचता। तरंग माडल में आपतित तरंगाग्र WW से रेखाछिद्र S के प्रत्येक बिन्दु पर प्रभाव पहुँचता है और S के प्रत्येक भाग से उत्पन्न द्वितीयक तरंगिकाओं का संपूर्ण योग लेने पर ज्ञात होगा कि प्रकाश का संचरण कैसे होगा। हम इस विषय की जाँच करते हैं। चित्र (7.10) में चित्र (7.9) के रेखाछिद्र को बहुत परिवर्द्धित करके दिखाया गया है। अब रेखाछिद्र AB है जिसकी चौड़ाई d है। इसे 2N बराबर भागों में बाटा गया है (चित्र में 2N=12)। प्रत्येक भाग को P से मिलाने वाली रेखाएँ दिखायी गयी है और वे समान्तर है क्योंकि d की अपेक्षा P की दूरी बहुत अधिक है।

आपतित तरंगाग्र से रेखाछिद्र AB के सभी भाग एक साथ ही प्रभावित होते हैं। अतः रेखाछिद्र से चलने वाली सभी 2N तरंगिकाएँ एक ही कला में होती हैं। परन्तु प्रेक्षण का बिन्दु A से समीपतम एवं B से दूरतम है। यदि A रेखाओं पर AM अभिलम्ब है तो पथान्तर BP—AP=BM। यदि हम इसे p कहें तो

$$p = d \sin\theta \qquad (7.10)$$

अब यदि प्रेक्षण बिन्दु P चित्र (7.9) के P_o बिन्दु पर है तो θ=0 और रेखाछिद्र के सभी भागों

चित्र 7.10 रेखाछिद्र AB द्वारा प्रकाश का विवर्तन

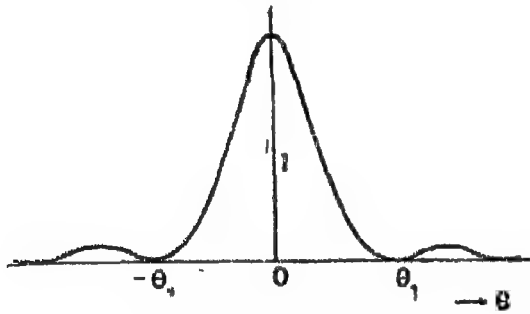
से तरंगिकाएँ वहाँ पर एक ही कला में पहुँचती हैं। अत. वहाँ पर विक्षोभ का आयाम बड़ा होता है और तीव्रता भी अधिक होती है। अब यदि θ का मान धीरे-धीरे बढ़े तो रेखाछिद्र AB के विभिन्न भागों से P तक पहुँचने वाली तरंगिकाओं की कला में भी धीरे-धीरे अंतर होता जाता है। जब $\theta = \theta_1$ पर पहुँचते हैं जो ऐसा है कि

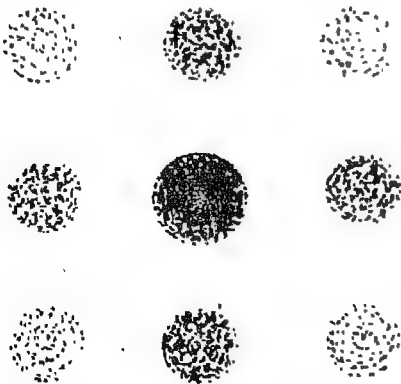
$$d \sin\theta_1 = \lambda \qquad (7.11)$$

तो A तथा B से P तक पहुँचने वाली तरंगिकाओं का कलान्तर 2π होता है। यदि हम रेखाछिद्र को N अंश वाले दो आधों में बाँटे तो पहले आधे के 1, 2, 3,..........N भागों में चलने वाली तरंगि-

काओं और दूसरे आधे के संगती $N+1$, $N+2$, $N+3$,... ... $2N$ भागों से चलने वाली तरंगिकाओं की कलाओं में अन्तर π होगा। अतः P पर कुल विक्षोभ शून्य होगा। इस तरह समीकरण (7.11) से P_0 की दोनों ओर θ कोण के मान, वे मान हैं जहाँ तक तीव्रता फैलती है और अन्त में शून्य हो जाती है।

दृश्य प्रकाश के प्रातिनिधिक $\lambda = 6 \times 10^{-5}$ से मी के लिए, 2 से मी चौड़ा रेखाछिद्र लेने पर प्रसार कोण θ_1 का मान 3×10^{-5} रेडियन होगा जो इतना छोटा है कि ध्यान मे नहीं आ सकता। परन्तु यदि रेखाछिद्र की चौड़ाई 2×10^{-4} से मी हो तो प्रसार कोण का मान ~ 0.3 रेडियन अर्थात् लगभग $20°$ होगा जिसकी उपेक्षा नहीं की जा सकती और जिस पर ध्यान अवश्य जायेगा। वास्तविक प्रेक्षण मे इस बात का मात्रात्मक सत्यापन होता है कि (i) प्रकाश सीधी दिशा के दोनों ओर फैलता है तथा (ii) प्रसार का कोण समीकरण (7.11) के अनुसार होता है। किरण प्रकाशिकी द्वारा सीमाओं के बाहर तक प्रकाश के फैलने को **विवर्तन** कहते हैं और प्रकाश में यह परिघटना उतनी ही देखी जाती है जितनी ऊर्मिकाओं में देखी जाती है जिन पर अध्याय (6) मे विचार किया जा चुका है। यदि $d \gg \lambda$ तो हम समीकरण (7.11) को इस प्रकार लिख सकते हैं

$$\theta_1 = \frac{\lambda}{d} \tag{7.12}$$

चित्र 7.11 अकेले एक रेखाछिद्र से विवर्तन होने पर तीव्रता में परिवर्तन। यदि $d=2\lambda$ हो तो θ_1 का मान $30°$.

चित्र (7.11) में तीव्रता और θ के बीच व्यवस्था आलेख दिया गया है। दोनो पार्श्वों पर स्थित क्षीण अतिरिक्त अधिकतम तीव्रताओं पर ध्यान देना चाहिये इसका दैनिक जीवन में अनुभव किसी दूरस्थ लैम्प को ($\sim$100 मी दूरी पर) महीन कपड़े की ओर से देखने से हो सकता हैं प्रत्येक लैम्प के 9 प्रतिबिंबों का प्रतिरूप बहुत सरलता से देखा जा सकता है। (चित्र 7.12)

चित्र 7.12 कपड़े की ओर से दूरस्थ लैम्प का दृश्य महीन कपड़े के लिए अंतराल अधिक होता है।

प्रकाशिक यंत्रों की परिसीमा (Limitation in Optical Instruments) तरंगीय प्रकृति के कारण प्रकाश का विवर्तन होता है और विवर्तन के कारण कोई भी प्रतिबिम्ब अनिंद्य नहीं हो सकता चाहे वह बढ़िया से बढ़िया दर्पण अथवा लैन्स से क्यों न बने। किसी बिन्दु बिम्ब के लिए प्रतिबिम्ब एक मंडलक होगा जिसका कोणीय अर्धव्यास λ/d के तुल्य होगा। इस कारण लघुत्तम कोणीय अन्तराल जो कोई दूरदर्शी नाप सकता है वह λ/d है जिसमें d उसके अभिदृश्य का व्यास है। अतः बड़ी सूक्ष्मता से आकाश का अध्ययन करने के लिए बहुत बड़े दूरदर्शियों की आवश्यकता होती है। इसी तरह सबसे अच्छे सूक्ष्मदर्शी द्वारा जो लघुत्तम रेखीय अंतराल जो अलग देखा जा सकता है दृश्य प्रकाश के तरंगदैर्घ्य ($\sim 6 \times 10^{-5}$ से मी) के तुल्य है। यदि हम अधिक सूक्ष्मता से जाँच करना चाहते हैं तो हमें और अधिक छोटे तरंग दैर्घ्य की तरंगों का उपयोग करना चाहिए।

इलैक्ट्रान सूक्ष्मदर्शी $\sim 10^{-7}$ सेमी की अथवा इससे भी अधिक सूक्ष्मता से देखने के लिए उपयोग मे लाया जाता है। परन्तु यह समझना कि इलैक्ट्रान भी तरंग-वत् आचरण करता है एक अलग बात है और अभी हम इसके विवेचन मे नही जायेंगे।

उदाहरण 7.6

उस अधिकतम दूरी का अनुमान कीजिये जिस पर मीटर के पैमाने को रखने पर इसके निशान (i) खाली आँख द्वारा तथा (ii) 2.5 से मी व्यास के अभिदृश्यक वाली दूरबीन के द्वारा अलग-अलग देखे जा सकते हैं।

हल :

प्रभावी λ को हम 6×10^{-5} सेमी मानते हैं और आँख के छिद्र को 2 मिमी मानते हैं। पैमानों के निशानों का पारस्परिक अंतराल 1 मिमी है तथा D मी की दूरी पर रखने पर उनका कोणीय अंतराल 1/1000D रेडियन है। इसे सूक्ष्मता से देखने के लिए आवश्यक प्रतिबन्ध यह है कि कोणीय प्रसार $\frac{\lambda}{d}$ का मान 1/1000 D से कम हो। अतः

$$\frac{\lambda}{d}<\frac{1}{1000D}$$

$$\therefore\ D<d/1000\lambda$$

$$\text{आखों के लिए}\ D<\frac{0.2\ \text{से मी}}{1000\times6\times10^{-5}\ \text{सेमी}}$$

$$\text{दूरबीन के लिए}\ D<\frac{2.5\ \text{से मी}}{1000\times6\times10^{-5}\ \text{सेमी}}$$

अतः खाली आँख के लिए दूरी 3 मीटर और दूरबीन के लिए दूरी 40 मीटर है।

7·7 लेसर (Lasers)

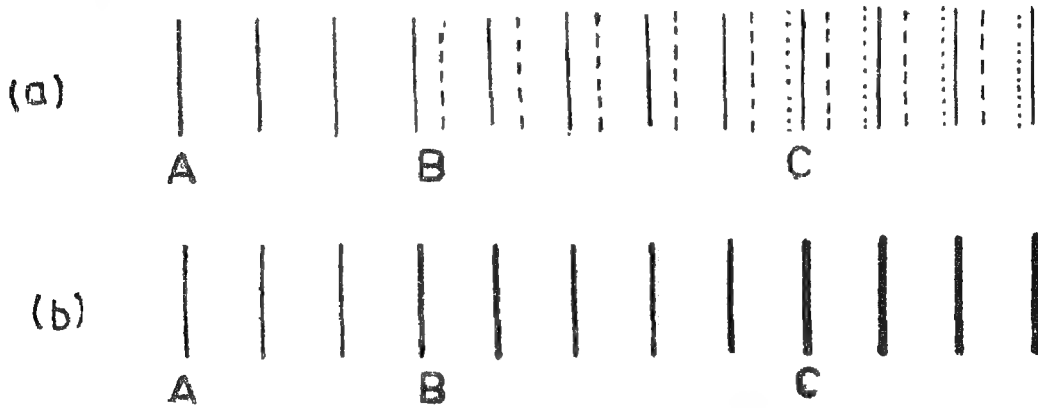
लैसर वह युक्ति है जिसमें स्रोत के अरबों उत्ते-जित परमाणु कला और दिशा की दृष्टि से उचित मेल में प्रकाश का उत्सर्जन करते हैं। इस मेल को स्रोत की कला सम्बद्धता कहते है।[1] इसमें अवकाश सम्बद्धता (अर्थात् दिशा) और कालसंबद्धता (अर्थात् कला) दोनो शामिल हैं।

उत्तेजित परमाणुओं द्वारा प्रकाश का स्वतः उत्सर्जन अथवा उत्प्रेरित उत्सर्जन हो सकता है। स्वतः उत्सर्जन में विभिन्न परमाणुओं द्वारा उत्सर्जन कला और दिशा की दृष्टि से अनियमित होता है। यदि परमाणुओं के समुच्चय में उसी तरंगदैर्ध्य का प्रकाश गुजारा जाय जो परमाणु उत्सर्जित करते है तो परमाणुओं द्वारा उत्प्रेरित उत्सर्जन हो सकता है। यह प्रकाश एक संकेत है और प्रत्येक परमाणु से उत्प्रेरित उत्सर्जन दिशा, ध्रुवण तथा कला में संकेत से मेल खाता है। फल यह होता है कि संकेत जितना उत्तरोत्तर उत्तेजित परमाणुओं तक पहुँचता है उत्प्रेरित तरंग उतनी ही प्रबल होती जाती है।

वस्तुतः किरण पुंज को अत्यधिक परिमार्जित दर्पणों से कई बार आगे पीछे परावर्तित किया जाता है ताकि कलासंबद्ध विकिरण (अर्थात् उत्प्रेरिक विकिरण) असंबद्ध विकिरण (स्वतः विकिरण) की अपेक्षा बहुत प्रबल हो जाये। एक महत्वपूर्ण पहलू यह है कि वही प्रकाश अनुत्तेजित परमाणुओं द्वारा अवशोषित होकर उन्हें उत्तेजित अवस्था तक पहुँचाते हैं। सामान्यतः अनुत्तेजित परमाणु उत्तेजित परमा-णुओं की अपेक्षा संख्या में बहुत अधिक होते हैं। अतः उत्प्रेरिक उत्सर्जन प्रबल नही हो पाता। यदि हम यह चाहते हों कि उत्प्रेरिक उत्सर्जन प्रमुख हो जाये तो आवश्यक प्रतिबंध यह है कि उत्तेजित परमाणुओं की संख्या अनुत्तेजित परमाणुओं की अपेक्षा बहुत अधिक हो जाय। इसे समष्टि व्युत्क्रमण कहते हैं। यहां हम इसका विस्तृत विवेचन नहीं करेंगे केवल संक्षेप में इसकी पूरी कार्यविधि बतायेंगे।

प्रारंभ में कोई स्वतः उत्सर्जित प्रकाश उत्प्रेरित उत्सर्जन पैदा करने के लिए संकेत का काम करता है।

1. दो स्रोतों की कला संबद्धता का विवेचन खण्ड (7.3) में किया गया है। उससे यह पृथक है; उसमें प्रत्येक स्रोत के अरबों परमाणुओं के उत्सर्जन के बीच कला का कोई संबंध नहीं था।

आगे पीछे के आनुक्रमिक गमन से प्रकाश का अवशोषण एवं उत्सर्जन दोनों होता है। परन्तु समष्टि व्युत्क्रमण के कारण उत्प्रेरित उत्सर्जन स्वतः उत्सर्जन की अपेक्षा प्रबल होता जाता है। इसे लेसर क्रिया का निर्माण कहते है। वस्तुतः पूरा परिणाम यह होता है कि किरणपुंज (i) अत्यन्त दिष्ट-कोण प्रसार केवल द्वारक द्वारा विवर्तन तक सीमित रहता है—तथा (ii) अत्यन्त कला संबद्ध हो जाता है—तरंगदैर्घ्य का प्रसार अत्यन्त सीमित होता है।[1] से इतनी तीव्रता उत्पन्न होती है कि वहाँ पदार्थ को गलित एवं वाष्पित किया जा सकता है। अतः लेसर का उपयोग अत्यन्त सूक्ष्म रध्रों को छेदने तथा धातु की मोटी चद्दरों को काटने के लिए किया गया है। अत्यन्त एक वर्णिता उच्च अनुसंधान में विशेष महत्व-पूर्ण है जहाँ इसके उपयोग से ऐसे प्रभावों का पता लगा है जिनका अध्ययन पहले नही किया जा सकता था।

चित्र 7-13 (a) स्वतः उत्सर्जन का यदि दिशा की दृष्टि से मेल भी हो तो कला में उसमें मेल नहीं होता। तरंगाग्र A B पर उसमें जुड़े तरंगाग्रो C पर जुड़े तरंगाग्रों की कला में कोई मेल नहीं होता। (b) उत्प्रेरित उत्सर्जन में दिशा और कला की दृष्टि से मेल होता है। A पर के तरंगाग्रों से B तथा C पर जोड़े गये तरंगाग्रों से मेल होता है। अतः अरबों जोड़ों से आयाम बहुत बड़ा हो जाता है।

लेसर के उपयोग (Uses of Lasers) : (1) लघु कोणीय प्रसार तथा (2) लघु तरंगदैर्घ्य प्रसार के गुण के कारण लेसर के बहुत से उपयोग हैं। पहले गुण का उपयोग स्पंद के परावर्तन की विधि के द्वारा बहुत बड़ी दूरियों को नापने के लिए किया जाता है। इस तरह पृथ्वी से चन्द्रमा की दूरी नापी गयी है। यदि लेन्स का उपयोग करके लेसर के प्रकाश को फोकसित किया जाय तो प्रतिबिंब का आकार विवर्तन के द्वारा ही सीमित होता है। अतः इसकी ऊर्जा को 10^{-6} से। मी^{2} के क्षेत्रफल में फोकसित किया जा सकता है जिस

उदाहरण 7.7

किसी लेसर का तरंगदैर्घ्य 7×10^{-7} मी, द्वारक $d=10^{-2}$ मी है। यह चन्द्रमा तक एक किरण-पुंज भेजता है। पृथ्वी से चन्द्रमा की दूरी 4×10^{8} मी है। इस किरणपुंज का कोणीय प्रसार तथा चन्द्रमा तक पहुँचने पर इसके क्षैत्रीय प्रसार की गणना कीजिये।

हल :

लेसर का कोणीय प्रसार केवल विवर्तन के कारण

1. λतरंगदैर्घ्य के एकवर्णी स्रोत मे वस्तुतः भी कुछ तरंग प्रसार $\triangle\lambda$ होता है। सबसे उत्तम स्रोतों के लिए इसका मान 10^{-3} A° होता है। लेसर में इसका मान 10^{-10} A° जितना छोटा हो जाता है। इस दृष्टि से लेसर किरणपुंज को अत्यन्त एकवर्णी कहते हैं।

होता है । अतः $\theta_d = \frac{\lambda}{d} = \frac{7 \times 10^{-7} \text{ मी}}{10^{-2} \text{ मी}}$

$= 7 \times 10^{-5}$ रेडियन

चन्द्रमा पर इसका रेखीय प्रसार $D.\theta_d$ तथा क्षेत्रीय प्रसार $(D\theta_d)^2$ है जिसमें D चन्द्रमा की दूरी है ।

क्षेत्रीय प्रसार $= (4 \times 7 \times 10^3)^2$ मी^{2}

$= 8 \times 10^8$ मी^{2}

उदाहरण 7.8

10 मि वाट शक्ति के किसी लेसर का द्वारक 3 मिमी है और इससे $\lambda = 7 \times 10^{-7}$मी के प्रकाश का उत्सर्जन होता है । यदि $f = 5$सेमी के लेन्स के द्वारा फोकसित किया जाय तो प्रतिबिंब के क्षेत्रफल तथा तीव्रता का अनुमान कीजिये ।

हल :

$$\theta_d = \frac{\lambda}{d} = \frac{7 \times 10^{-7} \text{ मी}}{3 \times 10^{-3} \text{ मी}}$$

$= 2.3 \times 10^{-4}$रेडियन

क्षेत्रीय प्रसार $= f\theta^2_d$ यदि हम इसे A लिखें तो $A = (5\text{सेमी} \times 2.3 \times 10^{-4})^2 = 1.3 \times 10^{-6}$ से मी^{2}, तीव्रता = शक्ति/क्षेत्रफल । यदि हम इसे I कहें तो

$$I = \frac{10 \times 10^{-3} \text{ वाट}}{1.3 \times 10^{-6} \text{ से मी}^2}$$

$= 8 \times 10^3$ वाट/से मी^{2}

शक्ति का यह संकेन्द्रण किसी भी धातु को गला सकता है और उसके भीतर छेद कर सकता है यह भी ध्यान देने योग्य है कि छेद बहुत बारीक 10^{-3} सेमी व्यास का होगा । लेसर के बरमो का अब नियमित रूप से उपयोग हो रहा है ।

7.8 स्पेक्ट्रममापी (Spectrometer)

जब श्वेत प्रकाश को किसी प्रिज्म के भीतर से गुजारा जाता है तब यह विभिन्न रंगों में बंट जाता है । तब हम कहते हैं कि स्पेक्ट्रम बन गया है चूँकि यह ज्ञात है कि रंगों का सम्बन्ध तरंग दैर्ध्य से है हम कहेंगे कि स्पेक्ट्रम किसी स्रोत के प्रकाश का तरंगों में वितरण है स्पेक्ट्रम के अध्ययन के लिये जिस उपकरण का उपयोग किया जाता है उसे स्पेक्ट्रममापी कहते हैं। अब हम स्पेक्ट्रममापी की मुख्य विशेषताओं पर विचार करेंगे ।

प्रिज्मीय पदार्थ (Prism Materials) किसी प्रिज्म द्वारा रंगों का वितरण इस कारण होता है कि अपवर्तनांक μ तरंगदैर्ध्य λ के साथ परिवर्तित होता है । इस गुण को परिक्षेपण कहते हैं । चूँकि हम जानते हैं कि निर्वात में प्रकाश के वेग (c) तथा किसी माध्यम में प्रकाश के वेग (c′) का अनुपात μ है हम यह भी कहते हैं कि परिक्षेपण वेग c′ का तरंगों में परिवर्तन है ।

सारणी 7.1 में क्राउन कांच तथा सघन फ्लिंट कांच के लिए $\lambda = 6563$ (लाल) तथा 4047 बैंगनी प्रकाश के लिए अपवर्तनांक दिये गये है । इसमें $\frac{\Delta\mu}{\Delta\lambda}$ तथा $\frac{\Delta c'}{\Delta\lambda}$ के मान भी दिये हैं ।

सारणी 7.1

कुछ प्रकाशिक कांचों के नियतांक

	μ_C $\lambda = 6563A^\circ$	μ_H $\lambda = 4047A^\circ$	$\Delta\mu$	$\frac{\Delta\mu}{\Delta\lambda}(A^{\circ-1})$	$\frac{\Delta c'}{\Delta\lambda}\left(\frac{\text{मी से}^{-1}}{A^\circ}\right)$	ω
क्राउन कॉंच	1.5164	1.5334	0.0170	-6.7×10^{-6}	$+9 \times 10^4$	0.017
फ्लिंट कॉंच	1.6936	1.7427	0.0491	-19×10^{-6}	$+20 \times 10^4$	0.033

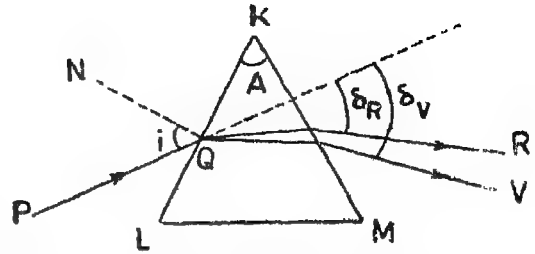
स्पेक्ट्रमापी के साथ कार्य में परिक्षेपण का अर्थ $\frac{\Delta\mu}{\Delta\lambda}$ होता है परन्तु उच्च सैद्धान्तिक कार्य में इसका अर्थ $\frac{\Delta c''}{\Delta\lambda}$ है। एक अन्य राशि **परिक्षेपण क्षमता** की परिभाषा है

$$\omega = \frac{\mu_F - \mu_C}{\mu_D - 1} \qquad (7.13)$$

जिसमें F, C, D क्रमशः तरंगदैर्ध्य 4861, 6563, तथा 5893 A° का संकेत होता है। यह स्पष्ट है कि स्पेक्ट्रममापी के कार्य के लिए क्राउन काँच नहीं सघन फ्लिंट को चुनना चाहिए। परन्तु चश्मों के लैन्सों के लिए चुनाव इसके विपरीत होगा। पराबैंगनी क्षेत्र में कार्य के लिए स्फटिक एवं फ्लुओराइट (CaF_2) का उपयोग किया जाता है तथा अवरक्त क्षेत्र के लिए शैल लवण (NaCl, KCl, KBr) आदि का उपयोग किया जाता है। परन्तु आगे का विवेचन सामान्य प्रकार का होगा।

अल्पतम विचलन का प्रतिबन्ध (Minimun Deviation Condition) : चित्र (7.14) में प्रकाश का एक किरणपुंज PQ प्रिज्म KLM पर i आपतन कोण पर पड़ रहा है। किरणपुंज का परिक्षेपण होता है और यह दिखाया गया है कि चरम सीमा के रंगों लाल (R) तथा बैंगनी (V) का विचलन क्रमशः δ_R एवं δ_V होता है। बैंगनी तथा लाल रंगों के बीच के कोण $\delta_V - \delta_R$ को दिये प्रिज्म का कोणीय परिक्षेपण कहते हैं।

किसी दिये रंग के लिए विचलन δ का मान अल्पतम कोण पर निर्भर करता है। i के छोटे मान से प्रारम्भ करके i को बढ़ाने पर δ का मान पहले कम होता है, एक अल्पतम मान δ_m तक पहुँचता है और फिर बढ़ने लगता है। अल्पतम विचलन के कोण δ_m का संबंध μ तथा प्रिज्म के कोण A (चित्र 7.14) के साथ इस सूत्र से है,

$$\mu = \frac{\sin \frac{1}{2}(A+\delta_m)}{\sin A/2} \qquad (7.14)$$

चित्र 7.14 किसी प्रिज्म द्वारा विचलन तथा विक्षेपण

उदाहरण 7.9

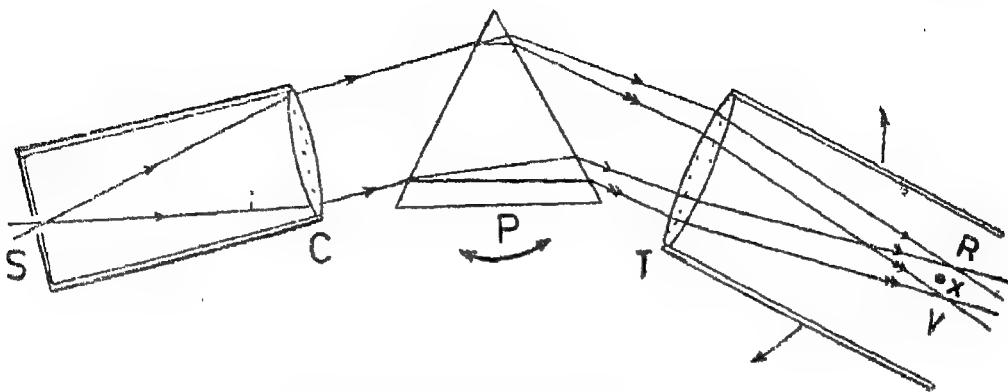
(i) μ = 1.694 तथा (ii) μ = 1.743 के लिए और 60° के प्रिज्म के लिये δ_m का मान निकालियें।

हल :

चूँकि $\sin \frac{1}{2}(60°) = 0.5$, हमें मिलता है कि
$\sin \frac{1}{2}(A+\delta_m) = \frac{1}{2}\mu$
= 0.847 तथा 0.872 सारिणी से हम पाते हैं कि $\frac{1}{2}(A+\delta_m) = 57° 54'$ एवं $60° 42'$
अतः $\delta_m = 55° 48'$ तथा $61°24'$

स्पेक्ट्रममापी (Spectrometer) : स्पेक्ट्रममापी के तीन मुख्य भाग होते हैं (क) समातरित्र (ख) प्रिज्म तथा अंशांकित मंच और (ग) दूरबीन। समांतरित्र एक नली होती है जिसके एक सिरे पर एक उत्तल लेंस और दूसरे सिरे पर ऊध्र्वाधर रेखाछिद्र होता है। रेखाछिद्र को नली के भीतर खिसकाया जा सकता है। जिससे इसका समंजन हो सके ताकि यह लेंस के फोकसीय समतल में लाया जा सके।

प्रिज्मीय मंच प्रिज्म के लिए एक वृत्ताकार क्षैतिज आधार होता है। (यह उर्ध्वाधार अक्ष के गिर्द घूमता है।) समांतरित्र का क्षैतिजअक्ष प्रिज्म के मंच के उर्ध्वाधर अक्ष से होकर गुजरता है।

दूरबीन का अक्ष क्षैतिज होता है और प्रिज्म के मंच के अक्ष से गुजरता है। इसे इस तरह आरोपित किया जाता है कि यह प्रिज्म मंच के अक्ष के चारों ओर घूम सके और इसकी कोणीय स्थिति एक अंशांकित

चित्र 7.15 स्पेक्ट्रममापी की प्रकाशीय क्रिया

वृत्त पर मापी जा सकती है। चित्र (7.15) में स्पेक्ट्रम-मापी के चूड़ात्मक चित्र का आरेख दिखाया गया है। S रेखाछिद्र है जो कागज के समतल के अभिलंब है। C समांतरित्र का लेन्स है जिसकी फोकस दूरी SC है। P प्रिज्म है। मंच तथा वृत्ताकार पैमाने को नहीं दिखाया गया है। T दूरबीन का अभिदृश्यक है जिसके फोकसी समतल को बिन्दुकित रेखा द्वारा दिखाया गया है। यहाँ स्पेक्ट्रम बनाता है। V तथा R दृश्य प्रकाश के चरम सीमा के रंगों को दर्शाते है। दूरबीन की नेत्रिका को नही दिखाया गया है) यह VR समतल के ठीक बाद में होती है। इस फोकसी समतल में एक उर्ध्वाधर तार होता है और दूरबीन को घुमाकर स्पेक्ट्रम के किसी अंश को इस तार पर (जिसे क्रास तार कहते है) लाया जा सकती है जिससे उस अंश के लिए δ_m की नाप की जा सके। परन्तु इसके पहले प्रिज्म P को इधर उधर घुमाना पड़ता है जिससे स्पेक्ट्रम के उस अंश के लिए अल्पतम δ प्राप्त किया जा सके तथा δ_m का मान नापा जा सके।

सामान्यत: ऐसे स्रोत का उपयोग करके जिसकी कई स्पेक्ट्रमी रेखाओं (बाद में देखिये) का मान ज्ञात हो स्पेक्ट्रममापी का अंशांकन किया जाता है। इस-प्रकार $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.........के लिए हम $\delta_1, \delta_2, \delta_3$... ......को नापते है और λ तथा δ के बीच ग्राफ खींचते हैं। यही अंशांकन ग्राफ है। अब अध्ययन किये जाने वाले किसी स्रोत के स्पेक्ट्रम के किसी अंश के लिए यदि अल्पतम विचलन का मान δ है तो अंशांकन ग्राफ से संगती तरंगदैर्ध्य λ ज्ञात किया जा सकता है।

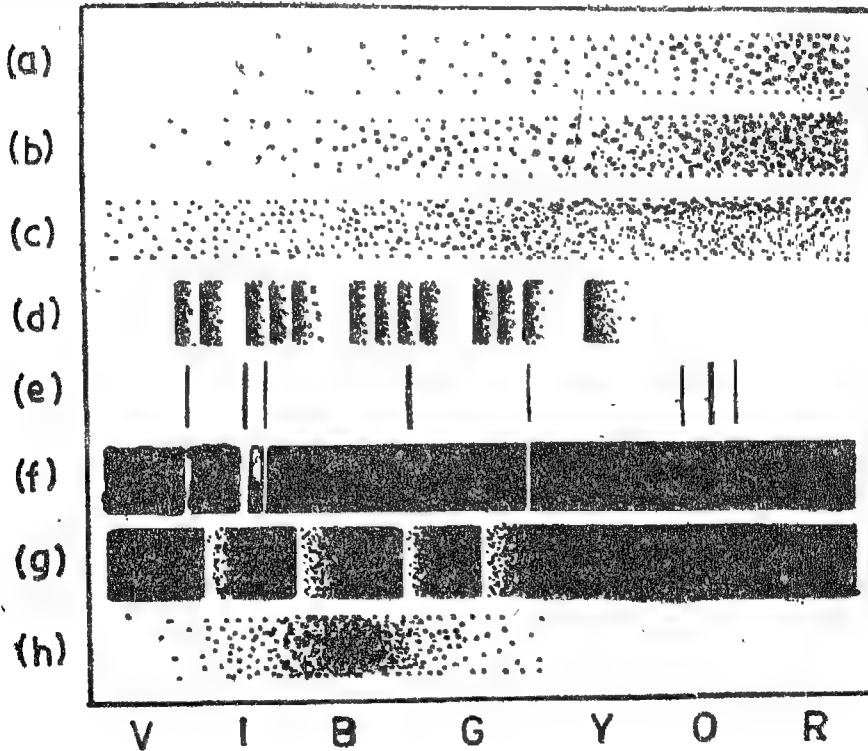
स्पेक्ट्रमलेखी (Spectrographs) : जब किसी स्पेक्ट्रम का फोटो लेना होता है तब दूरबीन के स्थान पर एक कैमरा लिया है (चित्र 7.15)। जिसका वास्तविक अर्थ यह है कि नेत्रिका (जिसे दिखाया नहीं गया है) को हटाकर एक फोटोपट्टिका फोकसी समतल RV में रखी जाती है। तब उपकरण को स्पेक्ट्रमलेखी कहते हैं। इस स्थिति में प्रिज्म तथा कैमरा को स्थिर रखा जाता है तथा कोण नापने के लिये किसी वृत्ताकार पैमाने की आवश्यकता नहीं होती। फोटो की प्लेट पर प्रेक्षित स्पेक्ट्रम की तुलना किसी ज्ञात स्पेक्ट्रम से की जाती है और प्लेट पर नाप लेकर λ के मानों की गणना की जाती है।

समांतरण तथा फोकसन का कार्य ऐसे अवतल दर्पणों द्वारा हो सकता है जिनके अग्र पृष्ठ को अल्यूमिनियमित किया गया हो। पराबैंगनी एवं अवरक्त क्षेत्रों के लिए यह उपयोगी होता है। अतः स्पेक्ट्रममापी कई अभिकल्पनाओं के हो सकते हैं, परन्तु उनका मूल सिद्धान्त वही होता है जिसे चित्र (7.15) में दिखाया गया गयाहै, समांतरण, परिक्षेपण और फोकसन।

7.9 विभिन्न प्रकार के स्पेक्ट्रम (Various Kinds of Spectra)

किसी स्रोत से निकले स्पेक्ट्रम को उत्सर्जित स्पेक्ट्रम कहते है। यह स्रोत से निकले प्रकाश का तरंगदैर्ध्यो में वितरण है । इसके विपरीत विभिन्न तरंगदैर्ध्यो के प्रकाश को उस पदार्थ से गुजारा जा सकता है और तब इस बात की जाँच की जा सकती है कि प्रत्येक तरंगदैर्ध्य पर प्रकाश का कितना अंश अवशोषित हुआ है । किसी पदार्थ द्वारा अवशोषित प्रकाश का तरंगदैर्ध्यों में वितरण उस पदार्थ का अवशोषण स्पेक्ट्रम कहलाता है । प्रत्येकस्रोत का एक विशिष्ट उत्सर्जन स्पेक्ट्रम होता है और प्रत्येक पदार्थ का एक विशिष्ट अवशोषण स्पेक्ट्रम होता है। इसके अतिरिक्त यदि किसी स्रोत में कोई विशेष पदार्थ X उत्सर्जक के रूप में हो तो उत्सर्जित स्पेक्ट्रम और X के अवशोषण स्पेक्ट्रम में सीधा संबध होता है (यद्यपि वे सर्वसम नहीं होते) ।

चित्र (7.16) में कुछ प्रातिनिधिक स्पेक्ट्रमों को फोटो की प्लेट के नेगेटिव के रूप में दिखाया गया है। प्लेट के लिए मान लिया गया है वह पूरे परिसर में एक समान सुग्राही है। इन पर हम आगे विचार कर रहे हैं।

संततस्पेक्ट्रम: (Continuous Spectrum) इसमें बिना किसी विच्छेद के सभी तरंगदैर्ध्यों के

चित्र 7. 16 कुछ प्रातिनिधिक स्पेक्ट्रम (a) निम्न ताप (1000° K) पर तंतु लैम्प उत्सर्जन, (b) घरों में होने वाले लैम्प (ताप2000°K) का उत्सर्जन, (c) सौर प्रकाश का स्पेक्ट्रम, (d) आण्विक गैस के विसर्जन का बैंड स्पेक्ट्रम, (e) तत्व की दशा में किसी गैस का उत्सर्जन स्पेक्ट्रम, (f) उपर्युक्त (e) गैस का अवशोषण स्पेक्ट्रम । (h) एक स्पेक्ट्रम जब श्वेत प्रकाश नीले फिल्टर से गुजारा जाता है ।

विकिरण होते है परन्तु तीव्रता बराबर परिवर्तित होती रहती है। चित्र 7.16 (a) मे (उदाहरणत:) रक्तोष्म लोहे का स्पेक्ट्रम है । तीव्रता कम है और हरित क्षेत्र तक पहुँचते-पहुँचते नगण्य हो जाती है। चित्र 7.16 (b) मे तंतुलैम्प का स्पेक्ट्रम है, तथा लगभग 2000°K, तीव्रता काफी बढ़ जाती है ।

विशेषत: नीले भाग की ओर चित्र 7.16 (c) में सौर स्पेक्ट्रम है (ताप ~6000°K)। महत्तम तीव्रता पीत क्षेत्र में है और (b) की अपेक्षा लघु तरंगदैर्ध्य क्षेत्र (V) में तीव्रता अधिक है। (b) एवं (c) की तुलना से यह स्पष्ट हो जायेगा कि क्यों गहरे नीले रंग के तथा जामुनी रंग के कपड़े तंतुलैम्प के प्रकाश में काले दीखते है। सौर स्पेक्ट्रम में वस्तुत. कुछ काली रेखाएँ (f) की तरह है । इन्हें फ्रांउनहोफर रेखाएँ कहते हैं। परन्तु अच्छे स्पेक्ट्रमलेखी के द्वारा ही इन्हे देखा जा सकता है।

संतत स्पेक्ट्रम द्रव्य की समष्टि द्वारा उत्सर्जित किया जाता है। यह पदार्थ के ऊपर बिल्कुल निर्भर नहीं करता, केवल ताप पर निर्भर करता है। इस कारण इसे कभी-कभी तापीय विकिरण कहते हैं।[1] एक उत्तप्त कोयला, उत्तप्त लोहा, उत्तप्त तंतु—सभी संतत स्पेक्ट्रम का उत्सर्जन करते हैं। सूर्य का भीतरी भाग 6000°K से संबंधित संतत स्पेक्ट्रम उत्सर्जित करता है परन्तु बाहर का गैसीय वायुमंडल कुछ तीव्र रेखाओं का अवशोषण कर लेता है।

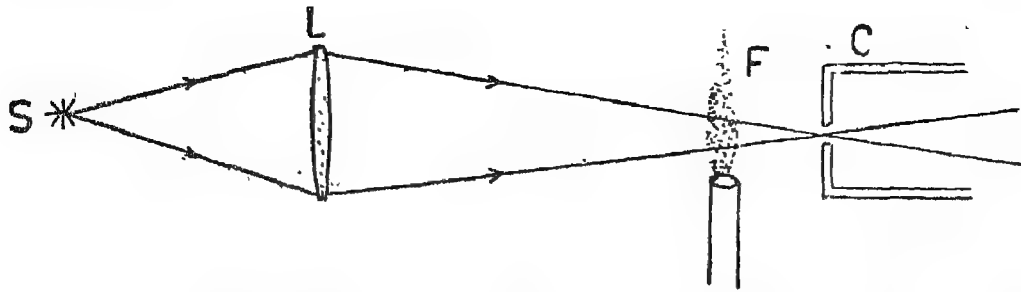
बैंड स्पेक्ट्रम (Band Spectrum) : इस स्पेक्ट्रम में हमे चित्र 7.16 (d) की तरह कुछ चमकीले बैंड दिखायी पड़ते हैं। प्रत्येक बैंड का एक तीव्र सिरा होता है, दूसरा सिरा क्रमशः फीका होता जाता है। वस्तुत: अच्छे स्पेक्ट्रमलेखी द्वारा प्रत्येक बैंड का एक तीव्र सिरा होता है, दूसरा सिरा क्रमशः फीका होता जाता है। वस्तुत: अच्छे स्पेक्ट्रमलेखी द्वारा प्रत्येक बैंड में कई पृथक्-पृथक् रेखाएँ दीखती हैं। तीव्र सिरे की ओर ये बहुत पास-पास होती है परन्तु दूसरे सिरे पर दूर-दूर फैली होती है (इसके विपरीत संतत स्पेक्ट्रम मे सबसे अच्छे स्पेक्ट्रमलेखी द्वारा भी अलग-अलग रेखाएँ नही दीखती)। बैंड का तीव्र किनारा बैंगनी क्षेत्र की ओर अथवा लाल क्षेत्र की ओर हो सकता है।

बैंड स्पेक्ट्रम आणविक गैस द्वारा, उदाहरण के लिए CO_2 अथवा NH_3 की विसर्जन नलिका द्वारा अथवा मोमबत्ती के प्रकाश के द्वारा उत्सर्जित होता है। प्रत्येक अणु के अपने विशिष्ट बैंडों के समूह होते है।

रेखिल स्पेक्ट्रम (Line Spectrum) : इस स्पेक्ट्रम में हम चित्र 7.16 (e) की तरह कुछ रेखाएँ देखते है। ये रेखाएँ क्षीण अथवा तीव्र हो सकती है। रेखिल स्पेक्ट्रम मुक्त परमाणुओं द्वारा अर्थात् गैसीय अवस्था के परमाणुओ द्वारा उत्सर्जित किया जाता है। उदाहरण के लिए विसर्जन नलिका में नीयान, सोडियम, पारा, आदि रेखिल स्पेक्ट्रम उत्पन्न करते हैं। प्रत्येक तत्व का अपना विशिष्ट स्पेक्ट्रम होता है। बुन्सेन ज्वालक में रखने पर लवण भी परमाणुओं मे टूट जाते है और धातुओं के परमाणु रेखिल स्पेक्ट्रम उत्सर्जित करते हैं। रसायन शास्त्री धात्विक तत्वों को पहचानने के लिए इस ज्वाला परीक्षण विधि का उपयोग करते हैं।

यह ध्यान में रखने योग्य है कि प्रकाश के लिए घरों में लगायी जाने वाली पारद नलिकाओं के भीतर प्रतिदीप्तिशील पदार्थ का लेप होता है जिससे रेखिल स्पेक्ट्रम के अतिरिक्त संतत स्पेक्ट्रम की पृष्ठभूमि प्राप्त होती है। ऐसी प्रतिदीप्तिशील पदार्थ चुना जाता है कि प्रकाश का तरंगदैर्ध्य मे वितरण स्वाभाविक प्रकाश (सौर प्रकाश) के जितना संभव ही समीप हो।

रेखिल अवशोषण स्पेक्ट्रम (Line Absorption Spectrum) : यदि श्वेत प्रकाश को किसी गैसीय अवस्था के तत्व के भीतर से गुजारा जाये तो चित्र 7.16 (f) की तरह कुछ विविक्त तीव्र रेखाएँ लुप्त होंगी। यदि चित्र 7.16 (c) तथा (f) की तरह किसी तत्व X के उत्सर्जन स्पेक्ट्रम की उसी तत्व

1. संतत स्पेक्ट्रम के प्रकाश को श्वेत प्रकाश भी कहा जाता है।

चित्र 7.17 परमाणविक सोडियम के अवशोषण उत्सर्जन स्पेक्ट्रम का प्रेक्षण। S श्वेत प्रकाश का स्रोत है, C स्पेक्ट्रम मापी का समांतरकारी है। F बुन्सन ज्वालक है जिसमें NaCl का घोल किसी वस्तु में रख कर रखा है। यदि $T_S > T_F$ है तो हमें Na का अवशोषण स्पेक्ट्रम मिलता है, का अध्यारोपण होता है।

के अवशोषण स्पेक्ट्रम के साथ तुलना की जाय तो परवर्त्ती की सभी रेखाएँ सदैव पहले में पायी जायेंगी (उत्सर्जन स्पेक्ट्रम में कई अतिरिक्त रेखाएँ भी होती हैं)। इस तरह यदि उच्च ताप के किसी स्रोत के श्वेत प्रकाश को बुन्सेन ज्वालक से गुजारा जाय जिसमें NaCl के घोल से भिगोया ऐस्बेस्टॉस रखा हो तो अन्य दृष्टियों से संतत स्पेक्ट्रम के पीत क्षेत्र में दो काली रेखाएँ दिखायी पड़ती हैं वे सोडियम के वाष्प के कारण हैं। यदि स्रोत को बन्द कर दें तो ज्वाला के कारण चमकीली पीत रेखाओं का युग्म उसी स्थान पर अन्य दृष्टियों से कृष्ण पृष्ठभूमि पर दिखायी देता है।

जैसा पहले कहा चुका है सौर स्पेक्ट्रम में फाउन-होफर कृष्ण रेखाएँ दिखाई पड़ती हैं। यदि हम पृथ्वी पर उन तत्वों की खोज करें जिनसे उन्हीं स्थानों पर उत्सर्जन रेखाएँ प्राप्त होती हैं तो हमें ज्ञात हो सकता है कि कौन से तत्व सूर्य के बाह्य वायुमंडल में पाये जाते हैं। तत्व पाये गये हैं, वस्तुतः हीलियम सर्वप्रथम सूर्य के फाउन होफर स्पेक्ट्रम में पाया गया और बाद में इसका अनुसंधान पृथ्वी पर हुआ। बैंड अवशोषण स्पेक्ट्रम यदि श्वेत प्रकाश को किसी आण्विक गैस जैसे आयोडीन के वाष्प में से गुजारा जाय तो संतत स्पेक्ट्रम में कुछ विविक्त बैंड लुप्त दिखायी देते है। चित्र 7.16(g) में यह स्पेक्ट्रम दिखाया गया है। प्रत्येक अवशोषण बैंड का एक सिरा तीव्र होता है और दूसरा सिरा क्रमशः क्षीण होता जाता है। किसी दिये अणु के अवशोषण बैंड उसके उत्सर्जन बैंड के संपाती नहीं होते। साधारणतः एक बैंड सम्पाती होता है और वहाँ से अन्य अवशोषण बैंड बैंगनी क्षेत्र की ओर होते हैं जबकि अन्य उत्सर्जन बैंड लाल क्षेत्र की ओर होते हैं।

बहुत प्रकार की स्थितियों में चित्र 7.16 (g) की तरह के पृथक् बैंड अवशोषण में नहीं प्राप्त होते, परन्तु स्पेक्ट्रम का पूरा विस्तृत क्षेत्र अवशोषित हो सकता है। चित्र 7.16(g) मे एक परिस्थिति दिखाई गई है जिसमें कुल बैगनो क्षेत्र तथा हरित से लाल तक कुल क्षेत्र अवशोषित हो जाता है और नीले क्षेत्र में थोड़ा भाग पारगमित होता है। उपयुक्त अवशोषक रंजकों को चुन कर प्रकाश के लिए 'फिल्टर' ऐसे ही बनाये जाते हैं।

प्रश्न—अभ्यास

7.1 यदि किसी कण को क्षैतिज दिशा में 3×10^8 मी/से के वेग से फैंका जाय तो 1 कि मी की दूरी चलने में वह कितना नीचे गिरेगा जबकि $g = 10$मी/से^{2}। क्या यह परिणाम कण के द्रव्यमान पर निर्भर करता है ? इस बात पर विचार करके कि न्यूटन की धारणा थी कि प्रकाश कणों का समूह है जो स्रोत से बहुत बड़े वेग (असीम) से फेंके जाते है अपने परिणाम की विवेचना कीजिये।

($5{\cdot}5 \times 10^{-11}$ मी)

7.2 (a) पारे के हरे प्रकाश का तरंगदैर्घ्य 5.5×10^{-5} सेमी है। इसकी आवृत्ति (हर्त्स में) तथा आवृत्ति काल (सेकिंड में) निकालिये। उन्हें क्रमशः मेगाहर्त्स तथा माइक्रोसेकिंड में परिवर्तित कीजिये।

[5.5×10^{14} हर्त्स, 1.8×10^{-15} से, 5.5×10^{8} मेगा हर्त्स (MHz), 1.8×10^{-9} माइक्रो से μs]

(b) रेडियो तरंगों के लिए '30 मीटर बैंड' होता है जिसका संबन्ध तरंगदैर्घ्य से है। इसकी आवृत्ति मेगाहर्त्स में प्राप्त कीजिये।

(10 मेगा हर्त्स (MHz))

(c) सूक्ष्मतरंगों के लिए 2400 मेगाहर्त्स का एक स्रोत है। इस विकिरणका तरंगदैर्घ्य प्राप्त कीजिये।

(1·25 सेमी)

7.3 यंग के प्रयोग में बारी-बारी से $\lambda = 5.4 \times 10^{-7}$मी तथा 6.85×10^{-8}मी का उपयोग कीजिये। प्रयोग की शेष ज्यामिति में कोई परिवर्तन न करते हुए फ्रिंजों के लिए दोनों स्थितियों में चित्र 7.2(b) की तरह आरेख खींचिये।

7.4 (i) दो स्रोतों के बीच कला-सम्बद्धता तथा (ii) एक ही स्रोत के प्रकाश की कला-सम्बन्द्धता का अर्थ बताइये। दो स्वतन्त्र स्रोतों से उत्पन्न प्रकाश कला सम्बद्ध क्यों नहीं होता ?

7.5 यह सिद्ध कीजिये कि समीकरण

$a_1 \cos \omega t + a_2 \cos (\omega t + \phi) = a \cos(\omega t + \phi')$ में a के मान का व्यंजक है

$a^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2 a_1 a_2 \cos\phi$

जब a_1 तथा a_2 आयाम और ϕ कलान्तर वाले दो स्रोतों के बीच व्यतिकरण होता है तब तीव्रता का मान प्राप्त करने के लिए इसके उपयोग को समझाइये।

7.6 (a) पतली परतों द्वारा व्यतिकरण को देखने के लिए चौड़े स्रोत की आवश्यकता होती है। समझाइये क्यों ?

(b) $\lambda = 5.9 \times 10^{-7}$मी के प्रकाश का उपयोग करने पर वायु की एक पतली परत के दो बिन्दुओं के बीच 7.4 फिल्में दिखाई पड़ती हैं। यह ज्ञात कीजिये कि इन दोनों बिन्दुओं के परत की मोटाई में कितना अन्तर हो जाता है।

(2.2 माइक्रोन)

7.7 तीव्रता के 100:1 अनुपात के दो स्रोतों के बीच व्यतिकरण होता है। व्यतिकरण के नमूने में अधिकतम और अल्पतम तीव्रता के बीच अनुपात ज्ञात कीजिये।

(3 : 2)

7.8 श्वेत प्रकाश के लिए यह माना जा सकता है कि वह $\lambda = 4000 A^\circ$ से $7000 A^\circ$ तक विस्तृत है। यदि तेल की किसी परत की मोटाई 10^{-4}सेमी है तो यह ज्ञात कीजिये कि अभिलंब आपतन के लिए दृश्य प्रकाश के किन तरंगदैर्घ्यों के लिए परावर्तन (i) क्षीण, (ii) तीव्र होगा। (तेल का $\mu = 1.40$ मानिये।)

((i) 4000, 4667, 5600, 7000 A°
(ii) 4308, 5091, 6222 A°)

7.9 (a) निर्वात में पारे के हरे प्रकाश का तरंगदैर्घ्य $5461 A^\circ$ है इसकी आवृत्ति ($c = 3.0 \times 10^8$मी से$^{-1}$ है) तथा काँच में ($\mu = 1.58$) और पानी में ($\mu = 1.34$) इसका तरंगदैर्घ्य निकालिये।

(5.5×10^{14} हर्त्स, 3460 A°, 4075A°)

(b) किसी पतली परत के A से B तक के क्षेत्र में $\lambda = 4358 A^\circ$ प्रकाश के लिए 10 फ्रिंजे दिखाई पड़ती हैं। उसी क्षेत्र में $\lambda = 5893 A^\circ$ के लिए कितनी फ्रिंजें दिखाई पड़ेंगीं ?

(7)

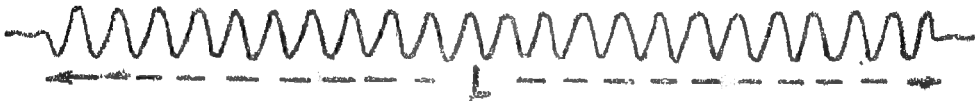
7.10 (a) 5.0 सेमी चौड़े रेखाछिद्र पर $\lambda = 2.0$ सेमी की सूक्ष्म तरंगें पड़ रही हैं। यह मान कर कि आपतन रेखाछिद्र के समतल की अभिलम्ब दिशा में है केन्द्रीय महत्तम का कोणीय फैलाव निकालिये।

($\pm 23°36$)

(b) यदि आपतन की दिशा अभिलम्ब से 15° का कोण बनाती है तो मूल दिशा की दोनों ओर का कोणीय फैलाव पुनः निकालिये।

($41°12'$, $8°6'$)

7.11 यदि किसी दूरस्थित पारे के लैम्प को किसी महीन कपड़े के टुकड़े के आर पार देखा जाय तो आयताकार नमूने में नियमित रूप से स्थित बहुत से लैंप दिखाई देते हैं जिनकी तीव्रता ज्यों-ज्यों केन्द्र से दूर जाते हैं कम होती जाती है। इसकी व्याख्या कीजिये। (सरलता के लिए यह मान लीजिये कि कपड़े के छिद्र $200\lambda \times 200\lambda$ के आकार के वर्ग हैं।)

7.12 (a) किसी अणु अथवा परमाणु द्वारा उत्सर्जित तरंगों की कुछ निश्चित कुल लंबाई होनी चाहिए (नीचे चित्र देखिये) क्या किसी ऐसी तरंग को $E = a\cos(\omega t + \phi_0)$ जैसे व्यंजक द्वारा निरूपित किया जा सकता है ? सोडियम के पीत प्रकाश के लिए यह लम्बाई L (इसे कला-सम्बद्ध लम्बाई कहते हैं)

चित्र 7.18

इस लम्बाई में दोलनों की संख्या (तथा) कला सम्बद्धता का काल प्राप्त कीजिये। ($\lambda = 5.9 \times 10^{-7}$ मी; $c = 3.0 \times 10^{8}$ मीसे$^{-1}$)।

(4×10^{6}, 8×10^{-11} से)

(b) हीलियम-नीयान के लेसर के लिए कला सम्बद्ध लम्बाई $\sim 10^{6}$सेमी है। $\lambda = 11 \times 10^{-7}$मी मानकर (i) इस लम्बाई में दोलनों की संख्या और (ii) कला सम्बद्धता का काल ज्ञात कीजिये।

(9×10^{14}, 3×10^{-2} से)

7.13 (a) बड़ी दूरियों को नापने में लेसर किरण पुंज को क्षणदीप की तरह उपयोग में लाने के क्या लाभ हैं ? समझाइये।

(b) एक लेसर किरणपुंज (i) बहुत एकदैशिक, (ii) बहुत कला सम्बद्ध है। इन दोनो कथनों के अर्थ को समझाइये।

(c) इस बात को समझाइये कि क्यों 0.2 वाट शक्ति के लेसर किरणपुंज को धातु की किसी पट्टिका में छेद करने के लिए फोकसित किया जा सकता है, परन्तु 100 वाट की बत्ती के किरणपुंज से यह नहीं हो सकता।

7.14 (a) समीकरण 7.14 से $\mu = 1.333$ (पानी) तथा $\mu = 1.740$ (मैथीलिन आयोडाइड) के लिए δ_m का मान निकालिए। $A = 60°$ लीजिये।

(23°36′, 61°0′)

(b) सघन फ्लिंट काँच में $\lambda = 6.56$; 5.89; 4.86 तथा 4.38×10^{-5} से मी के लिये क्रमश: $\mu =$ 1.642, 1.647, 1.661 तथा 1.672 है। ($A = 60°$ लेकर) प्रत्येक के लिये δ_m का मान निकालिए और λ तथा δ_m के बीच ग्राफ खीचिये।

(δ = 50°24′, 50°52′, 52°18′, 53°26′)

7.15 (a) चित्र (7.16) में तीन संतत स्पेक्ट्रम दिखाये गये है। तीव्रता और तरंगदर्ध्य के बीच ग्राफ खींच कर उनका आरेखीय निरुपण कीजिये। यह बताइये कि स्रोत का ताप बढ़ाने से क्या अंतर पड़ता है।

(b) I, λ वक्र का उपयोग करके (i) रेखिल अवशोषण स्पेक्ट्रम, तथा (ii) बैंड उत्सर्जन स्पेक्ट्रम के व्यवस्था चित्र खीचिये।

7.16 निम्न में से प्रत्येक के लिये I, λ के बीच ग्राफ खीचकर यह बताइये कि प्रत्येक में किस प्रकार का स्पेक्ट्रम मिलता है : (i) लोहे का तप्त क्षण, (ii) प्लैटिनम की नोक पर बुन्सेन ज्वाला में रखा $FeCl_3$ (iii) तन्तु लैम्प का प्रकाश ($T = 2200°K$) जो किसी बुन्सेन ज्वाला $T = 1400°K$ से गुजर रहा है जिसमें प्लैटिनम की नोक पर $FeCl_3$ रखा है (iv) मोमबत्ती का प्रकाश तथा (v) तन्तु लैम्प का प्रकाश जो किसी नलिका में रखी आयोडीन (I_2) की भाप से गुजर रहा है।

7.17 फ्राउनहोफर रेखाएँ क्या हैं ? उनकी क्या व्याख्या की जाती है ?

7.18 कोई स्पेक्ट्रममापी कोण को 6′ की शुद्धता से नाप सकता है। यदि किसी प्रयोग में $A = 60°0'$, $\delta_m = 48°36'$ मिलता है तो μ के मान की प्रतिशत शुद्धता का अनुमान कीजिये : (संकेत: का व्यजक निकाल कर $\triangle\mu$ के मान के परास की गणना कीजिये)।

(0.12 प्रतिशत)

अध्याय—8

गैसों का गतिज सिद्धान्त

(Kinetic Theory of Gases)

8.1 परिचय (Introduction)

द्रव्य बहुत सूक्ष्म कणों का बना है जिन्हें अणु कहते हैं। इस परिकल्पना के आधार पर भौतिकीय तथ्य जैसे द्रव्य की विभिन्न अवस्थाएँ, प्रत्यास्थता, वाष्पन आदि की संतोषजनक रूप से व्यवस्था की जा सकती है। उदाहरण के लिए द्रव्य की तीन अवस्थाओं की व्याख्या इस तरह की जा सकती है। किसी पदार्थ के अणु इस कारण एक साथ रहते हैं कि उसमें अन्तरा अणुक बल होते हैं। आंतरिक तापीय प्रक्षोभन के कारण इन अणु समूहों को टूटने से ये बल रोकते हैं। यदि तापीय प्रक्षोभन के बल अतरा-अणुक बलों की अपेक्षा दुर्बल हों तो पदार्थ ठोस अवस्था में रहेगा और ताप के काफी बढ़ने पर भी यह अपनी शक्ल एवं आयतन अपरिवर्तित रखेगा। यदि तापीय प्रक्षोभन के बल अंतराअणुक बलों के तुलनीय हों तो कमरे के ताप पर भी पदार्थ के अणु एक दूसरे के पास से सरक सकते हैं ऐसे पदार्थ द्रव कहलाते हैं और यद्यपि वे अपना आयतन बनाये रखते हैं उनकी शक्ल उस बर्तन की हो जाती है जिनमें उन्हें रखा जाता है। परन्तु यदि तापीय प्रक्षोभन के बल अंतराअणुक बलों की अपेक्षा सबल हों तो पदार्थ के अणु एक दूसरे से अलग हो जाते हैं तथा इन पदार्थों को गैस कहते हैं। गैसों का न अपना आयतन होता है न अपनी शक्ल होती है।

सभी पदार्थों के अणु सर्वदा गतिमान रहते हैं। आण्विक गति के अस्तित्व का सीधा प्रायोगिक प्रमाण विसरण एवं ब्राउनी गति के प्रक्रम हैं। उदाहरण के लिए जब कार्बनडाइआक्साइड के किसी जार को ब्रोमीन के जार के ऊपर रखते हैं तब यह पाया गया है कि कार्बनडाइआक्साइड ब्रोमीन में विसरित हो जाती है।

वनस्पतिज्ञ राबर्ट ब्राउन ने देखा की पानी में तैरते हुए बीजाणुओं में अनियमित गति होती है। जब छोटे कोलाइडी कण किसी द्रव में निलंबित हों और यदि किसी शक्तिशाली सूक्ष्मदर्शी द्वारा उनका निरीक्षण किया जाय तो उनमें भी ऐसी ही गति दिखाई देती है। ऐसी अनियमित गति को ब्राउनी गति कहते हैं। इस गति का एक साधारण उदाहरण हवा में तैरते हुए धुएँ के कण हैं। पादपों के बीजाणु एवं धुएँ के कणों के आकार के छोटे कण स्थूल परिवेश तथा सूक्ष्म अणुओं के बीच के हैं। प्रत्येक कण की गति चारों ओर के अणुओं की टक्करों की असमानता के कारण होती है। विसरण तथा ब्राउनी गति के प्रयोग इस बात का पोषण करते हैं कि किसी पदार्थ के अणु सदैव गतिशील होते हैं।

वाष्पन और भाप बनने के प्रक्रम का अणुओं की गति के साथ घनिष्ट संबंध है। जब किसी द्रव को गरम किया जाता है तब उसके अणु अधिक तेजी से गमन करते हैं और इसके फलस्वरूप उनमें से कुछ अणु द्रव से बाहर निकल जाते हैं। ऐसे तथ्यों के आधार पर वैज्ञानिकों ने ऊष्मा तथा आण्विक गति के बीच घनिष्ठ सम्बन्ध स्थापित किया है।

ऊपर की दो परिकल्पनाओं के आधार पर अर्थात् इसके आधार पर कि द्रव्य अणुओं का बना है और ऊष्मा का तादात्म्य आण्विक गति के साथ किया जा सकता है एक सिद्धान्त का विकास किया गया है जिससे कुछ भौतिक धारणाओं जैसे ताप, दाब ऊर्जा आदि की संतोषजनक व्याख्या की जाती है। ऐसे सिद्धान्त को द्रव्य का गतिज सिद्धान्त कहते हैं। गैसों के गतिज सिद्धान्त के सुगम होने के कारण यहाँ केवल उसी पर विचार किया गया है। अवश्य गैसों के इस तरह विकसित प्रतिरूप को गैसों के सुविदित नियमों की व्याख्या करनी चाहिए जिनमें मुख्य (i) गैस नियम, (ii) ऐवोगैड्रो का नियम तथा (iii) ग्रैहम का विसरण का नियम है जो गैसों के आचरण का वर्णन करते हैं।

गैसों का नियम (Gas Law)

जब गैसों पर दाब बढ़ाया जाता है तब किस परिणाम की आशा की जाती है? इसका ताप बढ़ सकता है, अथवा ताप में बिना किसी परिवर्तन के आयतन घट सकता है अथवा दोनों बातें हो सकती है। किसी गैस के एक ग्राम-अणु के लिए उस गैस का आचरण गैसनियम

$$pV = RT \quad (8.1)$$

द्वारा प्रकट होता है जिसमें V आयतन है, T ताप है, p वह दाब है जो गैस द्वारा बर्तन की दीवालों पर पड़ता है और R गैस नियतांक है।

ऐवोगैड्रो का नियम (Avogadro's Law)

इस नियम के अनुसार एक ही दाब एवं ताप पर गैसों के बराबर आयतनों में अणुओं की संख्या बराबर होती है। हम इस नियम की परीक्षा करें कि इसका अभिप्राय क्या है। 0°C ताप तथा एक वायुमंडल दाब पर किसी गैस के 22.4 लीटर का द्रव्यमान ग्रामों में उसके अणुभार के बराबर होता है। उदाहरण के लिए यदि गैस हाइड्रोजन है तो द्रव्यमान 2 ग्राम, यदि आक्सीजन है तो द्रव्यमान 32 होगा, इत्यादि। अतः यह निष्कर्ष प्राप्त हुआ है कि 0°C ताप पर तथा एक वायुमंडल दाब पर किसी भी गैस के एक ग्राम अणु भार में अणुओं की संख्या बराबर होगी। इस संख्या का अनुमान 6.06×10^{23} है। इसे ऐवोगैड्रो संख्या कहते है और इसका प्रतीक N है। ऐवोगैड्रो के नियम के अनुसार दो गैसों में कोई अन्तर नहीं होता।

ग्रैहम का विसरण-नियम (Graham's Law of Diffusion)

यदि दो बर्तन, जिनमें एक ही ताप एवं दाब पर दो भिन्न-भिन्न गैसें भरी हुई हों, परस्पर जोड़ दिये जायें तो यह देखा गया है कि प्रत्येक गैस का दूसरी गैस में विसरण होता है। यह प्रतीत होता है कि विसरण का प्रक्रम तब तक चालू रहता है जब तक दोनों बर्तनों में अणुओं का वितरण एक समान नहीं हो जाता। उसके बाद एक गतिक साम्य होता है, अर्थात् किसी बर्तन से दोनों गैसों के अणुओं की बाहर जाने वाली संख्या उस बर्तन के अन्दर आने वाले दोनों प्रकार के अणुओं की संख्या के बराबर होती है। यह देखा गया है कि विभिन्न गैसों के विसरण की गति भिन्न-भिन्न होती है, जो गैस जितनी ही भारी होती है उसके विसरण की गति उतनी ही कम होती है। इसे ग्रैहम-विसरण-नियम कहते हैं और एक गैस की दूसरे गैस से भिन्नता प्रकट करता है।

गैस का प्रतिरूप (Gas Model)

किसी भी प्रतिरूप में बहुत से तथ्यों की मात्रात्मक व्यवस्था करने की क्षमता होनी चाहिए। प्रतिरूप को मात्रात्मक होना चाहिए। गैसों का कैसा प्रतिरूप हो जो ऊपर दिये गये सभी नियमों की व्याख्या कर सके?

जो भौतिक राशियां गैसों के व्यवहार का वर्णन करती हैं वे हैं गैस का दाब, आयतन तथा ताप। दाब प्रति इकाई क्षेत्रफल पर बल है, बल संवेग के परिवर्तन की दर के अनुपात में होता है, और संवेग द्रव्यमान तथा वेग के गुणनफल का तुल्य होता है। किसी पिंड का द्रव्यमान उसके घटक कणों, अथवा अणुओं अथवा परमाणुओं के सम्मिलित द्रव्यमान के

बराबर होता है । अतः सरलीकरण के पश्चात् दाब को कणों की संख्या, उनके द्रव्यमान, उनके वेग तथा उस पृष्ठ के क्षेत्रफल पर निर्भर करना चाहिए जिस पर दाब पड़ रहा है । आयतन को तीन लम्बाइयों के गुणनफल के रूप में प्रकट किया जा सकता है और ताप को स्वयं उसी के रूप में प्रकट किया जा सकता है । अतः गैस के व्यवहार की व्याख्या करने वाले प्रतिरूप में जिन राशियों को होना चाहिए वे हैं कणों का द्रव्यमान, कणों की संख्या और वेग, आयतन तथा ताप ।

8.2 गैसों के गतिज सिद्धान्त को विकसित करने की मान्यताएँ (Assumptions for the Development of Kinetic Theory of Gases)

गैसों का गतिज सिद्धान्त नीचे लिखी सरलकारी मान्यताओं पर आधारित है :

1. गैस अणुओं की बनी है और ये अणु पूर्णतः प्रत्यास्थ हैं । इसका अर्थ यह है कि टक्कर होने पर अणुओं में कोई विरूपता नहीं होती और जिस कालान्तराल में टक्कर होती है वह टक्करों के बीच के कालान्तराल की अपेक्षा नगण्य है । अतः ऊर्जा का क्षय नहीं होता और टक्करों में गतिज ऊर्जा संरक्षित रहती है ।
2. अणुओं की गति अनियमित होती है अर्थात् वे सभी दिशाओं में हर संभव वेग के साथ गमन करते हैं और उनमें किसी दिशा अथवा किसी स्थान के प्रति वरीयता नहीं होती ।
3. टक्कर के काल को छोड़ कर अणुओं पर कोई बल काम नहीं करता । अणुओं के परस्पर आकर्षण अथवा विकर्षण के बल अथवा अणुओं और बर्तन की दीवालों के बीच बल नगण्य होते हैं । इसका अर्थ यह है कि ऊर्जा पूर्णतः गतिज होती है ।
4. दो अणुओं के बीच की औसत दूरी की तुलना में अणुओं का आकार नगण्य है ।

इन सरलकारी मान्यताओं से गणितीय कठिनाइयों से बचने में सहायता मिलती है । इनसे यह भरोसा भी हो जाता है कि जिस प्रतिरूप का विकास किया जायेगा वह सभी गैसों के लिए लागू होगा चाहे वह H_2 को अथवा CO_2 आदि हों । परन्तु सही अर्थों में इनमें से कोई भी मान्यतायें सत्य नहीं हैं । इनसे केवल एक सीमा निश्चित होती है जिसके आगे विकसित किया गया प्रतिरूप लागू नहीं होता । जब सिद्धान्त को अधिक व्यापक बनाया जाता है और इसकी प्रयोज्यता का क्षेत्र अधिक विस्तृत किया जाता है तब ये परिसीमाएँ स्पष्ट हो जाती हैं उदाहरण के लिए विकसित किया गया प्रतिरूप द्रवित गैस के आचरण की संतोषजनक व्यवस्था नहीं करता । फिर भी इस तरह विकसित किया गया प्रतिरूप आसन्नतः ठीक होने के बावजूद गैसों के संबंध के बहुत से प्रायोगिक तथ्यों की संतोषजनक व्याख्या प्रस्तुत करता है ।

8.3 गैस द्वारा उत्पादित दाब का व्यंजक (Expression for the Pressure Exerted by a Gas)

किसी गैस के एक ग्राम अणु पर विचार करें जो एक घनाकार बर्तन में है जिसकी दीवारें पूर्णतः प्रत्यास्थ हैं और जिसकी भुजाओं की लम्बाई L है । अणुओं की गति अनियमित है । वे आपस में टकराते हैं चूँकि दीवारों से अणु बहुत बड़ी संख्या में टकराते हैं, दीवारें एक बल का अनुभव करती हैं । प्रति इकाई क्षेत्रफल पर पड़ने वाला बल गैसों द्वारा दीवारों पर डाले गये दाब के बराबर है ।

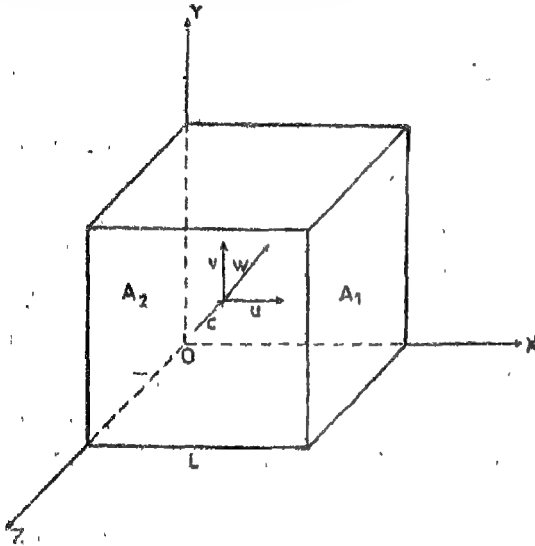
कल्पना कीजिये कि कोई अणु C वेग से गमन कर रहा है और इसका द्रव्यमान m है । घन के किनारों की दिशा में C को u, v, w घटकों में वियोजित किया जा सकता है (चित्र 8.1) । घन के किनारों को X, Y, Z अक्षों की दिशा माना गया है । अतः

$$C^2 = u^2 + v^2 + w^2 \qquad (8.2)$$

मान लीजिये X-अक्ष की अभिलम्ब दिशा में घन के फलक A_1 एवं A_2 हैं । यदि कोई अणु A_1 फलक से टकराता है तो यह —u वेग से वापस आयेगा । इसके v तथा w घटकों में कोई परिवर्तन नहीं होगा ।

इस टक्कर के फलस्वरूप अणु के संवेग का परिवर्तन $= m(-u) - mu$ होगा।

इस प्रक्रम में A_1 दीवार को कितना संवेग मिलेगा ? यह सुविदित है कि कुल संवेग संरक्षित रहता है । अतः

A_1 को मिला संवेग 2mu होगा । काल के इकाई अन्तराल में A_1 को कुल कितना संवेग मिलेगा ?

चित्र 8.1 एक बर्तन के भीतर किसी काय के वेग के घटक ।

अणु A_1 से टकरा कर लौटने के पश्चात् A_2 फलक से टकरायेगा । A_1 से A_2 तक जाने में उसे L/u समय लगेगा । अतः प्रत्येक $\frac{2L}{u}$ काल के अंतराल के पश्चात वह A_1 दीवार से टकरायेगा । अतः इकाई समय में A_1 दीवार के साथ इसके टकराने की संख्या $\frac{u}{2L}$ होगी । अतः इस अणु द्वारा A_1 दीवार को दिया गया संवेग होगा

$$mu.\ \frac{u}{2L}=\frac{mu^2}{L} \qquad (8\cdot3)$$

न्यूटन के द्वितीय नियम के अनुसार हम पाते हैं कि इस अणु के कारण दीवार पर लगा कुल बल mu^2/L होगा ।

चूँकि दाब की परिभाषा प्रति इकाई क्षेत्रफल पर बल है, अतः इस अणु के कारण दीवार पर दाब है

$$=mu^2/L^3 \qquad (8.4)$$

यदि बर्तन में N अणु हैं तो उनके द्वारा A_1 दीवार पर लगा दाब होगा

$$=p\frac{m}{L^3}\left(u_1^2+u_2^2+\ldots\ldots+u^2\right) \qquad (8\cdot5)$$

$$=\frac{m}{V}N\,\overline{u^2} \qquad (8.6)$$

जिसमें $V=L^3$ बर्तन का आयतन है तथा $\overline{u^2}$ सभी N अणुओ के लिए u^2 का औसत मान है ।

चूँकि अणुओं की गति पूर्णतः अनियमित है, समीकरण (8·2) से यह फल मिलता है कि

$$\overline{u^2}=\overline{v^2}=\overline{w^2}=\frac{1}{3}\overline{C^2}$$

ऊपर के समीकरण में $\overline{u^2}$ का यह मान रखने से हम पाते है कि

$$p=\frac{1}{3}\frac{mN\overline{C^2}}{V} \qquad (8.7)$$

चूँकि गैस सभी दिशाओ में एक ही दाब प्रयुक्त करती है अतः यह परिणाम निकलता है कि किसी भी दिशा में लगाये बल का मान है

$$p=\frac{1}{3}\frac{mNC^2}{V}$$

$$=\frac{1}{3}\rho C_2 \qquad (8.8)$$

जिसमें $\rho=\frac{mN}{V}$ गैस का घनत्व (प्रति इकाई आयतन अणुओं का द्रव्यमान) है ।

समीकरण (8.8) के उपयोग से किसी गैस का $C_{r.m.s.}$ अर्थात् वेग-वर्ग-माध्य-मूल का मान बड़ी सुगमता से प्राप्त किया जा सकता है । उदाहरण के लिए वायु के लिए

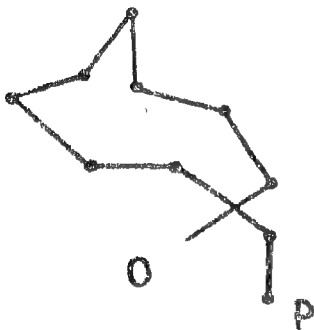
$\rho=1.293\times10^{-3}$ ग्राम से मी$^{-3}$

तथा $C_{r.m.s.}=\sqrt{\overline{C^2}}=\sqrt{\frac{3p}{\rho}}$

$$=\sqrt{\frac{3\times76\text{सेमी}\times13.59\text{ग्राम से मी}^{-3}\times980\text{ग्रासेमी}^{-2}}{0.001293\text{ ग्राम से मी}^{-3}}}$$

$=0,485$ कि मी से$^{-1}$

इससे प्रकट है कि वायु के अणुओं की चाल वायु में ध्वनि के वेग के तुलनीय है जो लगभग 0.33 किमी से$^{-1}$ है।

गतिज सिद्धान्त की प्रागुक्ति है कि वायु के अणुओं का वेग लगभग 0.5 किमी से$^{-1}$ है परन्तु यह उस चाल से बहुत कम है जिससे सुगंध किसी

8.2 कई टक्करों के फलस्वरूप किसी कण का टेढ़ा मेढ़ा पथ

कमरे में फैलती है। हम इसकी व्याख्या कैसे कर सकते हैं? अनुमान है कि अणुओं की आगे पीछे से बहुत टक्करें होती हैं जिससे उसका रास्ता टेढ़ा-मेढ़ा होता है और प्रति इकाई काल में उसका विस्थापन बहुत कम होता है।

उदाहरण के लिए कोई अणु अपनी यात्रा O से प्रारंभ करके कई टक्करों के पश्चात् P तक पहुँच सकता है (चित्र 8.2)। यह कहा गया है वायु में विसरण करने में ब्रोमीन अणु के साथ 0.1 मी की प्रभावी दूरी चलने में मार्ग में 10^{12} टक्कर होते हैं।

8.4 नियमों का निगमन (Deduction of the Laws)

कुछ मान्यताओं (8.2) की सहायता से हमने गैसों के गतिज सिद्धान्त का विकास किया है जिसमें अणुओं के विषय में द्रव्यमान, वेग, संख्या, ताप, आदि राशियाँ सम्मिलित हैं। अब हम इस बात की परीक्षा करें कि कहां तक यह सिद्धान्त उन नियमों की व्याख्या करता है जो गैसों के आचरण को बताते हैं।

बॉयल का नियम (Boyles' Law) :

समीकरण (8.7) से हमें मिलता है कि

$$pV = \frac{1}{3}\, mN\overline{C^2}$$

चूंकि m तथा N दोनों अचर हैं, अतः यह निष्कर्ष निकलता है कि जब तक $\overline{C^2}$ अपरिवर्तित रहेगा pV अचर होगा। हम जानते है कि यदि ताप एक समान हो तो उष्मा का प्रवाह नहीं होता। अतः हमारे तंत्र में जहाँ ऊर्जा पूर्णतः गतिज मानी गई है ऊर्जा में कोई परिवर्तन नहीं होगा, अर्थात् गैस के अणुओं का वेग-वर्ग-माध्य अपरिवर्तित रहेगा। इससे हमें बॉयल का नियम प्राप्त होता है कि ताप के अचर रहने पर दाब तथा आयतन का गुणनफल अचर रहता है।

ऐवोगैड्रो का नियम (Avogadro's Law) :

दो गैसों a तथा b पर विचार करें जो एक ही दाब एवं ताप पर हैं। समीकरण (8.8) से हमें मिलना है कि

$$p = \frac{1}{3}\frac{m_a N_a \overline{C_a^2}}{V_a} \text{ तथा } p = \frac{1}{3}\frac{m_b N_b \overline{C_b^2}}{V_b}$$

चूंकि दोनों गैसें एक ही ताप पर है अतः गैस a के किसी अणु की औसत गतिज ऊर्जा का मान गैस b के किसी अणु की औसत ऊर्जा के बराबर होगा। अतः

$$\frac{1}{2} m_a \overline{C_a^2} = \frac{1}{2} m_b \overline{C_b^2}$$

ऊपर के समीकरणों में इसे रखने पर

$$\frac{N_a}{V_a} = \frac{N_b}{V_b}$$

इसका अर्थ है कि एक ही ताप एवं दाब पर गैसों के बराबर आयतन में अणुओं की संख्या बराबर होती है। यही ऐवोगैड्रो का नियम है जिसका वर्णन 8.1 में किया गया था।

ग्रैहम का नियम (Graham's Law) :

गैस a पर विचार करें जिसका विसरण गैस b में हो रहा है। जब दोनों गैसों द्वारा प्रयुक्त दाब परस्पर बराबर हो जाता है तब यह कहा जाता है कि

वे स्थायी अवस्था में हैं। अतः समीकरण (8.8) से निष्कर्ष निकलता है कि जब $\rho_a = \rho_b$ है तब

$$\frac{1}{3}\rho_a \overline{C^2_a} = \frac{1}{3}\overline{\rho_b C^2_b}$$

अथवा $$\frac{C_{a r.m.s.}}{C_{b r.m.s.}} = \sqrt{\frac{\rho_b}{\rho_a}} \qquad (8.9)$$

इसका अर्थ यह है कि गैसों के विसरण की दर अलग-अलग है, जिस गैस का घनत्व जितना ही अधिक है उसका विसरण उतना ही धीमे होता है। यही ग्रैहम-विसरण नियम (8.1) है।

इस तरह हम देखते हैं कि जिस प्रतिरूप का हमने विकास किया है वह गैसों के आचरण का वर्णन करने वाले नियमों की संतोषजनक व्याख्या करता है।

8.5 ताप और गतिज ऊर्जा के बीच संबंध (Relation Between Temperature and Kinetic Energy)

किसी गैस के ग्राम अणु पर विचार करें जिसमें N अणु हैं। बर्तन के N अणुओं के स्थानान्तर की गतिज ऊर्जा का व्यंजक है

$$E = \frac{1}{2} mN\overline{C^2} \qquad (8.10)$$

समीकरण (8.8) से हमें मिलता है कि

$$pV = \frac{1}{3} mN \overline{C^2}$$

गैस के नियम का उपयोग करने से

$$pV = RT = \frac{1}{3} mN\overline{C^2}$$

इसको समीकरण (8.10) में रखने से हमें प्राप्त होता है कि

$$pV = RT = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2} mN \overline{C^2}\right)$$

$$= \frac{2}{3}E$$

अथवा $$E = \frac{3}{2}RT \qquad (8.11)$$

कभी कभी इसको बोल्ट्जमान नियतांक $K = R/N$ के रूप में प्रकट करना अधिक सुविधाजनक है जो अकेले एक अणु के लिए गैस नियतांक है। समीकरण (8.11) से हम पाते हैं कि

$$E = \frac{3}{2}KNT \qquad (8.12)$$

अथवा किसी एक अणु के स्थानान्तरण की औसत गतिज ऊर्जा होगी

$$\frac{E}{N} = \frac{3}{2}KT. \qquad (8.13)$$

इन सम्बन्धों से पूर्णतः स्पष्ट होता है कि ताप और अणुओं की गतिज ऊर्जा के बीच घनिष्ठ सम्बन्ध है। जब कभी गैस की गतिज ऊर्जा में वृद्धि होती है ताप बढ़ता है।

8.6 ऊर्जा-समविभाजन नियम (The Law of Equipartition of Energy)

जब हम तन्त्रों की तापीय अवस्था का विवेचन करते हैं तब हम स्वतन्त्रता की कोटि का क्या अर्थ समझते हैं ?

हमारे गैस के प्रतिरुप में हीलियम जैसे एक परमाण्विक अणु की स्थानांतरीय गति में उसका रेखिक वेग तीन अभिलम्ब दिशाओं में तीन घटकों u, v तथा w के द्वारा निरुपित हुआ था। ये तीनों घटक एक दूसरे से स्वतन्त्र हैं। गैस के किसी अणु की गतिज ऊर्जा $\frac{1}{2}mu^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mw^2$ होती है तथा हमारी इस मान्यता से कि अणु में केवल गतिज ऊर्जा है यह व्यंजक अणु की कुल ऊर्जा को प्रकट करता है। चूँकि इस व्यंजक में अणु की ऊर्जा के निरुपण में तीन स्वतन्त्र वर्गित पद हैं, हम कहते है कि अणु में तीन स्वतन्त्रता की कोटियाँ हैं।

हमने देखा कि किसी एक परमाण्विक गैस के एक ग्राम-अणु की औसत ऊर्जा (समीकरण 8.11) $\frac{3}{2}RT$ है। चूँकि अणुओं में तीन स्वतन्त्रता की कोटियाँ हैं तथा $u^2 = v^2 = w^2 = \frac{1}{3}C^2$ से यह निष्कर्ष प्राप्त होता है कि स्वतन्त्रता की प्रत्येक कोटि की सहचारी ऊर्जा $\frac{1}{2}RT$ है।

चूँकि एक ग्राम-अणु में अणुओं की संख्या N है इसका अर्थ है कि किसी अणु के लिए स्वतन्त्रता की

प्रत्येक कोटि की सहचारी औसत गतिज ऊर्जा $\frac{1}{2}$KT है।

यह तथ्य कि स्वतन्त्रता की विभिन्न कोटियों में ऊर्जा बराबर-बराबर विभाजित होती है, ऊर्जा सम-विभाजन नियम कहलाता है। इससे यह परिणाम प्राप्त होता है कि किसी द्विपरमाण्विक अणु की गतिज ऊर्जा $\frac{5}{2}$KT होगी क्योंकि उसमें पाँच स्वतन्त्रता की कोटियाँ होती है एवं किसी त्रिपरमाण्विक अणु की गतिज ऊर्जा 3KT होगी क्योंकि स्वतन्त्रता की कोटियाँ छः होती हैं।

8.7 गैसों की विशिष्ट ऊष्मा (Specific Heats of Gases, C_p & C_V)

हीलियम जैसी एक परमाण्विक गैस की विशिष्ट ऊष्मा के लिए हम हम व्यंजक प्राप्त करें। एक परमाण्विक गैस में अणु तथा परमाणु अभिन्न होते हैं। यह मान लिया जाता है कि परमाणुओं में केवल गतिज ऊर्जा होती है। अतः गैस के एक ग्राम अणु की कुल ऊर्जा

$$E_1 = \frac{3}{2}RT$$

होगी। चूँकि ऊष्मा तथा आण्विक गति में अभिन्नता मानी गई है, इस व्यंजक का उपयोग ताप के परिवर्तन के कारण ऊष्मा का ह्रास एवं वृद्धि ज्ञात करने के लिये किया जा सकता है। स्थिर आयतन पर किसी गैस की ग्राम अणुक विशिष्ट ऊष्मा की परिभाषा ऊष्मा के उस परिमाण से की जाती है जिसकी आवश्यकता आयतन को अचर रखते हुए गैस के एक ग्राम अणुक का ताप एक डिग्री से बढ़ाने के लिये होती है, अर्थात्

$$C_V = E_{T+1} - E_T = \frac{3}{2}R$$

मान लीजिये कि किसी गैस के ग्राम अणु का ताप T से T+1 तक स्थिर दाब पर बढ़ाया जाता है। ऐसा करने में यदि गैस का आयतन V से V' हो जाता है तो गैस को बाह्य दाबके विरुद्ध p (V'—V) परिमाण में कार्य करना पड़ता है। [यह दृष्टव्य है कि किया कार्य $= (F)(d) = (p)(A)(d) = (p)(V)$]। अतः, ताप की उसी वृद्धि के लिए, स्थिर दाब पर हमें गैस को उसी परिमाण में अधिक ऊर्जा देनी पड़ेगी जितनी गैस ने बाह्य कार्य करने में व्यय किया। अतः $C_p - C_v$ = किया हुआ बाह्य कार्य

$$= \frac{p(V' - V) \text{ जूल}}{\text{ग्राम अणु}\,^\circ K} \qquad (8.14)$$

गैस नियम के अनुसार

$pV = RT$ (गर्म करने के पहले)

$pV' = R(T+1)$ (गर्म करने के पश्चात्)

अथवा $p(V' - V) = R$

$$\text{अतः } C_p - C_v = \frac{R \text{ जूल}}{\text{ग्राम अणु}\,^\circ K} \qquad (8.15)$$

कार्य के मात्रकों को ऊष्मा के मात्रकों में परिवर्तित करने पर

$$C_p - C_v = \frac{R}{J} \; \frac{\text{कैलारी}}{\text{डिग्री}} \qquad 8.16)$$

जिसमें $J = 4.18$ जूल/कैलारी

$= 4.18 \times 10^7$ अर्ग/कैलारी

चूँकि एक परमाण्विक गैस के लिए

$C_V = \frac{3}{2}R$ है C_p का मान $\frac{5}{2}R$ होगा।

ऊपर के विवेचन से हम देखते हैं कि गैसों का सरलीकृत गतिज प्रतिरुप ताप तथा दाब के पर्याप्त परास के लिए गैसों के आचरण की व्याख्या प्रस्तुत करता है। परन्तु इससे वेग वितरण के विषय में कोई अनुमान नहीं प्राप्त होता अर्थात् एक वेग से चलने वाले अणुओं की संख्या, किसी दूसरे वेग से चलने वाले अणुओं की संख्या, आदि। इसके अतिरिक्त यह प्रतिरुप केवल आदर्श गैसों के लिए लागू होगा, अर्थात् वे गैसें जो बॉयल के नियम का पालन करती हैं। अतः इस प्रतिरुप में अणुओं के आकार, उनके पारस्परिक बल आदि के विचार से और गणितीय तकनीक के दृष्टिकोण से सुधार की आवश्यकता है। इन तर्कों से हम वांडरवाल्स अवस्था समीकरण तक तथा मैक्सवेल बोल्ट्ज़मान वितरण नियम तक पहुँचते हैं और ये दोनों ही हमारी वर्तमान पुस्तक के क्षेत्र के बाहर हैं।

प्रश्न-अभ्यास

8.1 कोलाइडी कणों की ब्राउनी गति चारों ओर के माध्यम के अणुओं की असमान टक्कर के कारण होती है। इस कथन की संक्षिप्त व्याख्या कीजिये।

8.2 वाष्पन की परिघटना की व्याख्या कीजिये।

8.3 इस बात की संक्षिप्त व्याख्या कीजिये कि चन्द्रमा के पृष्ठ पर कोई वायुमंडल क्यों नहीं है।

8.4 आदर्श गैस के समीकरण का उपयोग करके R का मान निकालिये। (सामान्यताप एवं दाब पर एक ग्राम अणु का आयतन 22.4 लीटर है)। (8.3 जूल/मोल °K)

8.5 यदि तीन अणुओं के वेग क्रमशः 0.5,1 तथा 2 किमी/से हों तो वेग-वर्गमाध्य-मूल तथा वेग-माध्य के बीच सम्बन्ध प्राप्त कीजिये।

(2 : 1)

8.6 (a) साधारण दाब तथा ताप पर हाइड्रोजन के एक ग्राम अणु का (i) वेग-वर्गमाध्य-मूल तथा औसत गतिज ऊर्जा निकालिये। (यह दिया हुआ है कि हाइड्रोजन का घनत्व 0.09 किग्रा/मी³ है।)

(b) यदि हाइड्रोजन के एक अणु का द्रव्यमान 3.34×10^{-27} किग्रा है तो ऐवोगैड्रो संख्या की गणना कीजिये।

(c) बोल्ट्ज़मान नियतांक K के मान की गणना कीजिये।

$$\left(1.38 \times 10^{-23} \frac{\text{जूल}}{\text{अणु } {}^\circ K}\right)$$

8.7 हमारे वायुमंडल की हवा हाइड्रोजन, आक्सीजन, कार्बन डाईआक्साइड इत्यादि जैसी गैसों का मिश्रण है। गतिज सिद्धान्त का उपयोग करके यह सिद्ध कीजिये कि हवा का कुल दाब हाइड्रोजन, आक्सीजन, कार्बन डाईआक्साइड आदि गैसों के आंशिक दाब के जोड़ के तुल्य है (गैसों के आंशिक दाब का डाल्टन का नियम) अर्थात्

$$P = P_1 + P_2 + P_3 + \ldots\ldots$$

8.8 आर्गन के लिये C_p और C_v की गणना कीजिये (यह दिया गया है कि

$$R = 8.3 \ \frac{\text{जूल}}{\text{मोल } {}^\circ K}\text{)।}$$

8.9 किसी $3 \times 4 \times 6$ घन मीटर के आयतन के कमरे के भीतर का द्रव्यमान की तुलान निम्न के भार से की जा सकती है :

A. पिन

B. पेंसिल

C. मेज

D. ट्रक

(a) उचित स्तर पर चिह्न लगाइये।

(b) अपने उत्तर की तुलना द्रव्यमान की गणना से कीजिये (यह दिया गया है कि वायु का घनत्व 1. 3 किग्रा/मी³ है)

(C)

अध्याय 9

परमाणु भौतिकी

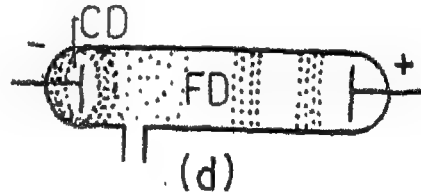
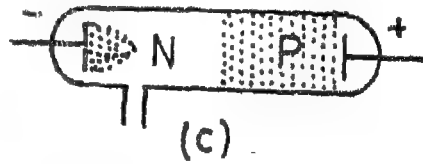
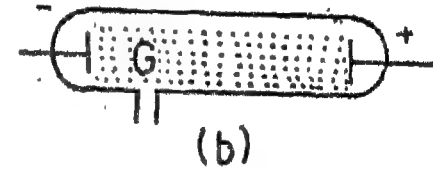
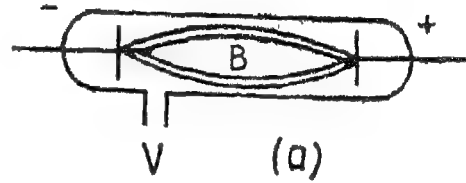
(Atomic Physics)

1.9 द्रव्य की प्रकृति (The Nature of Matter)

मानव सभ्यता के बहुत प्रारम्भ से ही यह प्रश्न उठा था कि क्या द्रव्य का अपरिमित विभाजन किया जा सकता है। भारतीय तत्वज्ञ एवं ऋषि कणद ने सबसे पहले ईसा से छः सौ वर्ष पूर्व यह विचार प्रकट कया था कि द्रव्य ऐसे छोटे कणों का बना है जिनका विभाजन नहीं हो सकता। उन्हें वे परमाणु कहते थे लगभग सौ वर्ष बाद यूनानी तत्वज्ञ डेमाक्रीट्स ने बहुत छोटे अविभाज्य कणों की कल्पना की जिन्हें उसने 'ऐटम' का नाम दिया।

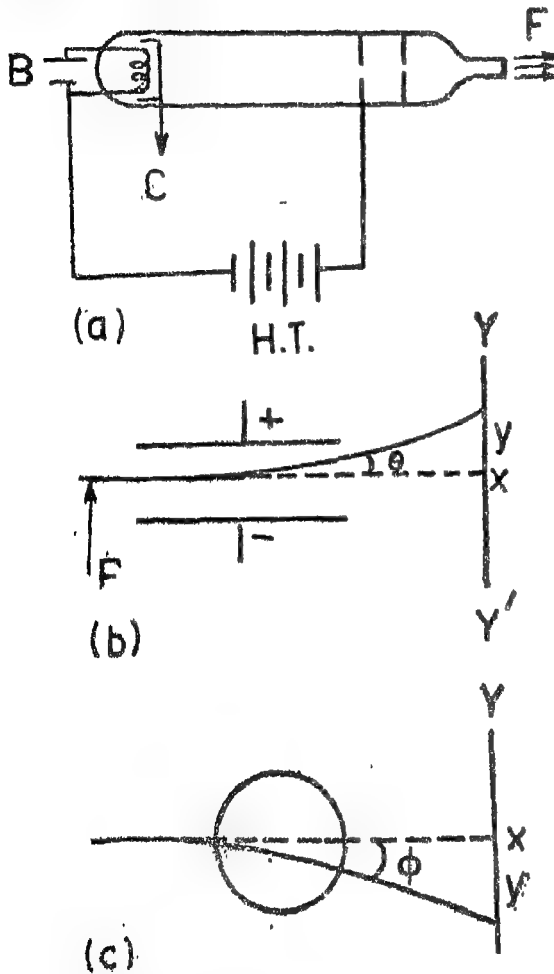
डाल्टन ने परमाणु सिद्धान्त का उपयोग रासायनिक संयोग तथा पदार्थों के वियोजन के नियमों की व्याख्या के लिए किया।

विद्युत्-अपघटन के फैराडे के नियमों ने द्रव्य की विद्युतीय-प्रकृति को संस्थापित किया कि द्रव्य धन एवं ऋण आवेशों का बना है।

विरलित दाब की गैसों में विद्युतीय आवेश के चालन के अध्ययन से यह सिद्ध हुआ कि परमाणु भी संरचनायुक्त हैं। इन्हीं अध्ययनों से पहले कैथोड किरणों की खोज हुई। परमाणु की संरचना तथा विद्युत्चुम्बकीय विकिरण के साथ इसकी पारस्परिक क्रिया इस अध्याय के मुख्य वर्णन विषय हैं। इनका विवेचन हम भौतिकीय, गणितीय विस्तार की अपेक्षा धारणाओं पर विशेष बल देते हुए करेंगे।

9.1 विभिन्न दाबों पर विद्युतीय विसर्जन का सामान्य स्वरूप।

9.2 कैथोड किरणें (Cathode Rays)

गैसों में विद्युतीय आवेश के चालन के फलस्वरूप कई खोजें हुई। ऐसे अध्ययनों में प्रयोग किये गये उपकरण को चित्र 9.1 में दिया गया है।

कांच की नली में परिबद्ध दो इलेक्ट्रोडों-कैथोड एवं ऐनोड को 10,000 वोल्ट के उच्च विभव से जोड़ा

9.2 (a) कैथोड किरण प्रक्षेपी। B=बैटरी, C=कैथोड
F=इलेक्ट्रानों का सूक्ष्म किरणपुंज,
HT=उच्च विभव, YY′=जिंक सल्फाइड का परदा
(b) विद्युतीय क्षेत्र में इलेक्ट्रान किरणपुंज
(c) चुम्बकीय क्षेत्र में इलेक्ट्रान किरणपुंज

गया है। एक पार्श्व नली को एक पम्प के साथ जोड़ा गया है जिससे नली के अन्दर वायु के दाब को आवश्यक स्तर पर बनाये रखा जाय। जब उच्चविभव को चालू किया जाता है तब विसर्जन नलिका के भीतर एक क्षीण विद्युत्धारा प्रवाहित होने लगती है। इसका अर्थ यह है कि इलेक्ट्रोडों के बीच आवेश का प्रभाव हो रहा है। परम्परा के अनुसार ऋण आवेश ऐनोड की ओर और धन आवेश को कैथोड की ओर प्रवाहित होते माना जाता है। विसर्जन नलिका में विभिन्न दाबों (पारे के 10 मिमी से <1 मिमी तक) पर जो विभिन्न प्रक्रम होते हैं उन्हें चित्र (9.1) में चित्रित किया गया है। बहुत कम दाब पर, पारे के $\leqslant 10^{-4}$ मिमी पर, विसर्जन नलिका का भीतरी भाग काला हो जाता है और ऐनोड के पास नलिका की दीवालों पर हरिताभ दीप्ति दिखाई पड़ती है। नलिका के भीतर वायु इतनी विरलित है कि आवेश एक इलेक्ट्रोड से दूसरे इलेक्ट्रोड तक प्रवाहित होते हैं। ऐनोड में एक छोटा-सा छेद करने से उसके पीछे कांच पर एक हरा धब्बा दिखाई पड़ता है यह दीप्ति नई किरणों के कारण है जिन्हें कैथोड किरणें कहते हैं और जो कांच की दीवालों पर पड़ती हैं। कैथोड किरणें कैथोड से उत्पन्न होती हैं और धन ऐनोड की ओर प्रवाहित होती हैं; अतः इन पर ऋण आवेश होना चाहिए।

कैथोड किरणों के पथ में अबरक के एक चक्र को रखने से चक्र घूमने लगता है। इस प्रयोग से यह विदित हुआ कि कैथोड किरणें उनके पथ में रखी वस्तुओं को संवेग तथा ऊर्जा प्रदान करती हैं। अतः कैथोड किरणों में द्रव्यमान एवं वेग होना चाहिए।

कैथोड किरणों के पथ पर अभिलम्ब दिशा के विद्युतीय क्षेत्र के प्रभाव को चित्र 9.2 (b) में दिखाया गया है। विचलन की दिशा से विदित होता है कि कैथोड किरणें ऋण आवेशयुक्त कण होते हैं।

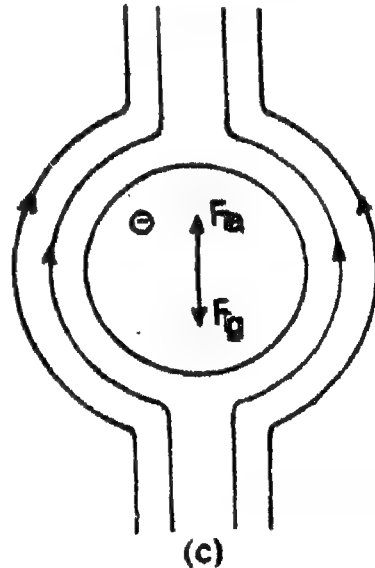
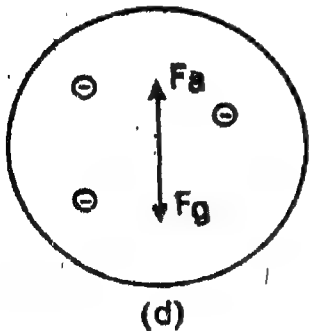
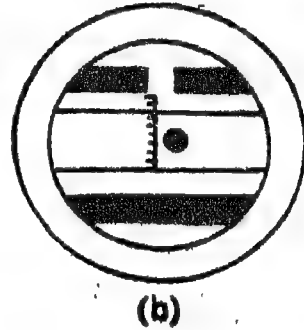
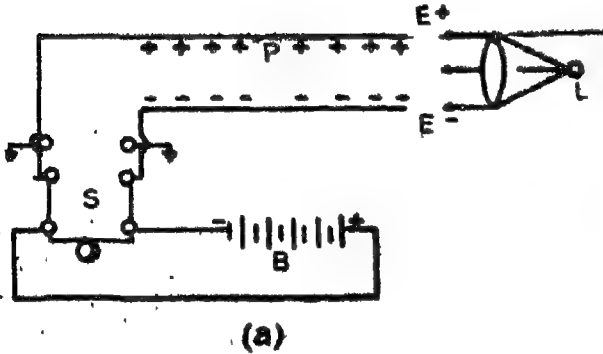
इन प्रयोगों से यह स्पष्ट है कि कैथोड किरणें कण हैं जिसका द्रव्यमान m तथा आवेश e है। कैथोड किरणोंके आवेश एवं द्रव्यमान के अनुपात को टॉम्सन ने ज्ञात किया।

$\frac{e}{m}$ के लिए टॉम्सन का प्रयोग (Thomson's Experiment for $\frac{e}{m}$)

यदि कैथोड नलिका के इलैक्ट्रोडों के बीच विभवान्तर V वोल्ट हो (चित्र 9.2 a), तो कैथोड किरणों को एक इलेक्ट्रोड से दूसरे इलेक्ट्रोड तक जाने में प्राप्त ऊर्जा का मान eV होगा। अतः हमें मिलता है कि

$$eV=\frac{1}{2}mu^2 \quad (9.1)$$

जिसमें e कूलाम में, m किलोग्राम में तथा u मी/से में है। इससे कैथोड किरणें के वेग का मान प्राप्त होता है।

चित्र (9.2 b) में विद्युतीय क्षेत्र E (न्यूटन/कूलाम में) के कैथोड किरणों के प्रभाव पर विचार किया गया है। चूंकि E कैथोड किरणों के गमन की दिशा के अभिलम्ब हैं, ऋणात्मक कण धन Y की दिशा में eE बल का अनुभव करते हैं। पट्टिकाओं के बीच के क्षेत्र से निकलने के पश्चात् विक्षेपित किरणपुंज सीधी रेखा में गमन करता है। किरणपुंज परदे पर अपने अविक्षेपित स्थिति से y दूरी पर पड़ता है।

9.3 (a) मिलिकन के तैल बिन्दु प्रयोग की युक्ति (b) सूक्ष्मदर्शी तैलबिन्दु का दृश्य (c) गुरुत्वाकर्षण तथा घर्षण के तैलबिन्दु पर बल (...) =ऋण आवेश (d) तैल बिन्दु का विद्युतीय एवं गुरुत्वाकर्षणी बल

ऋण आयनों पर (B वेबर/मी²) के चुम्बकीय क्षेत्र का प्रभाव चित्र (9.2 C) में दिखाया गया है। u वेग से चलने वाले कण Y दिशा में Beu बल का अनुभव करते हैं।[1]

यदि कैथोड किरणों पर विद्युतीय तथा चुम्बकीय क्षेत्र एक ही स्थान पर लगाये जाये तो बल Y अक्ष की दिशा में होगा। यदि विद्युतीय तथा चुम्बकीय क्षेत्रों द्वारा लगाये बल विपरीत दिशाओं में तथा बराबर हों, अर्थात् यदि

$$eE = Bue \qquad (9.2)$$

हो तो कणों का विक्षेप नहीं होगा। उपर्युक्त समीकरण से कैथोड किरणों का वेग $u = E/B$ है। परन्तु समीकरण (9.1) से हमें वेग का मान ज्ञात है। इन दोनों समीकरणों से हमें मिलता है कि

$$\frac{e}{m} = \frac{E^2}{2VB^2} \qquad (9.3)$$

अतः प्रयोग में किरण के शून्य विक्षेप की परिस्थिति के लिए E,V तथा B का मान ज्ञात होने पर कैथोड किरणों के लिए e/m का मान ज्ञात किया जा सकता है। टॉम्सन ने जिस विधि से कैथोड किरणों के e/m का मान ज्ञात किया था वह ठीक वैसी ही नहीं थी जिसका वर्णन ऊपर किया गया है परन्तु दोनों विधियों का सिद्धान्त एक ही था। यह पाया गया कि किसी भी पदार्थ से प्राप्त कैथोड किरणें सर्वसम (एक ही e/m) हैं और उन्हें इलैक्ट्रॉन कहते है। कथोड किरणों की प्रकृति कैथोड के ऊपर के परिलेप अथवा नलिका की गैस के ऊपर निर्भर नहीं करती। इस तरह हम इस महत्वपूर्ण निष्कर्ष पर पहुँचते हैं कि इलेक्ट्रॉन सभी पदार्थों का मूल घटक है। इस समय e/m का स्वीकृत मान 1.76×10^{11} कूलाम/किग्रा है।

मिलिकन का तेल बूँद प्रयोग (Millikan's Oil Drop Experiment)

यह प्रयोग इलेक्ट्रॉन के आवेग को ज्ञात करने के लिए अभिकल्पित किया गया है। चित्र (9.3) में इस प्रयोग की व्यवस्था दिखाई गई है। एक स्विच S द्वारा उच्च विभव की बैटरी B को धातु की दो समान्तर पट्टियों से जोड़ा जाता है। स्विच खोलने पर पट्टियाँ आवेशित हो जाती हैं और उनके बीच विद्युतीय क्षेत्र E स्थापित हो जाता है। जब स्विच S बन्द होता है तब पट्टियाँ पृथ्वी के शून्य विभव पर होती हैं। ऊपर वाली वृत्ताकार पट्टी के केन्द्र पर एक छोटा-सा छेद होता है। पट्टियों के बीच का अन्तराल प्रकाश के स्रोत L तथा एक अभिसारी लेन्स द्वारा प्रदीप्त होता है। वृत्त पट्टियो के बीच मे सूक्ष्मदर्शी से दिखाई देने वाला क्षेत्र है। एक सूक्ष्म शोकरक द्वारा ऊपरी पट्टी पर तेल की एक बारीक फुहार पड़ती है। तेल की सूक्ष्म बूंदें P से होकर भीतर जाती हैं और सूक्ष्मदर्शी द्वारा देखी जाती है। सामान्यतः घर्षण के कारण तेल की इन बूंदों में कुछ आवेश आ जाता है। जब पट्टियाँ स्विच बन्द होने के कारण शून्य विभव पर होती हैं और तेल की बूंदे गुरुत्वाकर्षण के बल F_g के कारण निचली पट्टी की ओर गिरती हैं। चूंकि बूंदें बहुत छोटी होती है और वायु के घर्षण के कारण उनकी गति में बाधा पडती है, वे अत्यन्त शीघ्र ही अन्तिम अचर वेग V_o प्राप्त कर लेती हैं। यह अन्तिम वेग V_o किसी नियत समय में बूंदों के अधोगमन को नाप करके ज्ञात किया जाता है (चित्र 9.3b)। अन्तिम वेग से बूँद का द्रव्यमान M ज्ञात किया जाता है। बूँद को निचली पट्टी तक पहुँचने के पहले ही स्विच को खोल दिया जाता है। चूँकि बूँद पर ऋण आवेश होता है, यह धन आवेशित ऊपरी पट्टिका की ओर उठता है। तब इसका अन्तिम वेग V_1 नाप लिया जाता है। यदि विद्युतीय तीव्रता E का मान ऐसा है कि ऊपर की ओर इसका खिचाव नीचे की ओर के गुरुत्वीय बल के बराबर हो तो बूंद सूक्ष्मदर्शी के दृष्टि क्षेत्र में स्थिर हो जाती है। इस परिस्थिति को चित्र (9.3d) में दिखाया गया है। जहाँ यह माना गया है कि इस पर तीन इलेक्ट्रॉनों के बराबर आवेश है। बूँद के संतुलन के लिए

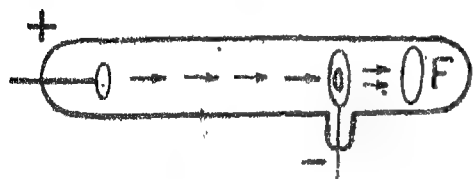
$$Mg = neE \qquad (9.4)$$

1. *आवेशित कण पर E विद्युतीय तथा B चुम्बकीय क्षेत्र द्वारा लोरेंट्ज़ बल लगता है जिसका मान $F = q\,(E + u \times B)$ है जिसमें q तथा u कण के क्रमशः आवेश तथा वेग हैं।

जिसमे ne बूँद के ऊपर कुल आवेश है। M,E तथा g के ज्ञान से ne का मान निकाला जा सकता है। इस प्रयोग को कई बार दोहराया गया तब यह देखा गया कि बूँद के ऊपर सदैव आवेश e का पूर्णांकीय गुणज है। इस समय e का स्वीकृत मान 1.60×10^{-19} कूलाम है। मान्यता के अनुसार e का मान ऋणात्मक है। इस प्रयोग से प्रकृति में आवेश का क्वांटमीकरण हुआ, अर्थात् आवेश सदैव e के पूर्णांकीय गुणज के रूप में पाये जाते हैं।

$\frac{e}{m}$ तथा e के मान से इलेक्ट्रॉन का द्रव्य मान 9.11×10^{-31} कि ग्रा प्राप्त होता है।

कुल्या किरण (Canal Rays)

यदि विसर्जन नलिका में इलेक्ट्रॉन कैथोड से ऐनोड की ओर जाते हैं तो यह स्वाभाविक है कि धन आवेश ऐनोड से कैथोड की ओर जायेंगे। इन धन आवेशों को धन किरण कहते हैं। चित्र (9.4) में इनकी उत्पत्ति को चित्रित किया गया है। सभी तत्वों के लिए कुल्या किरणों के e/m का मान एक ही नहीं होता।

9.4 कैनाल किरणों के उत्पादन का आरेख
→कैनाल किरणें, F=प्रतिदीप्ति परदा

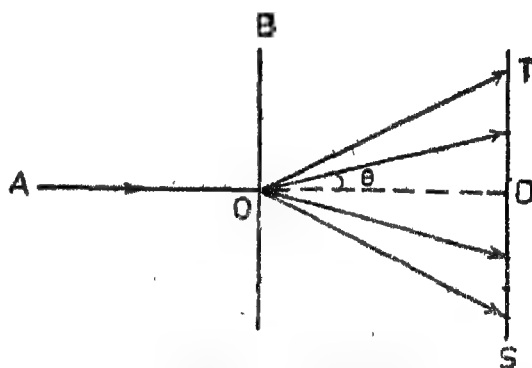
वीन ने हाइड्रोजन की धन किरणों को प्रोट्रॉन से सगी-कृत किया जिनके लिए आवेश तथा द्रव्यमान का मान क्रमशः 1.60×10^{-19} कूलाम तथा 1.6×10^{-27} कि ग्रा है।

9.3 परमाणु का स्वरूप (Model of the Atom)

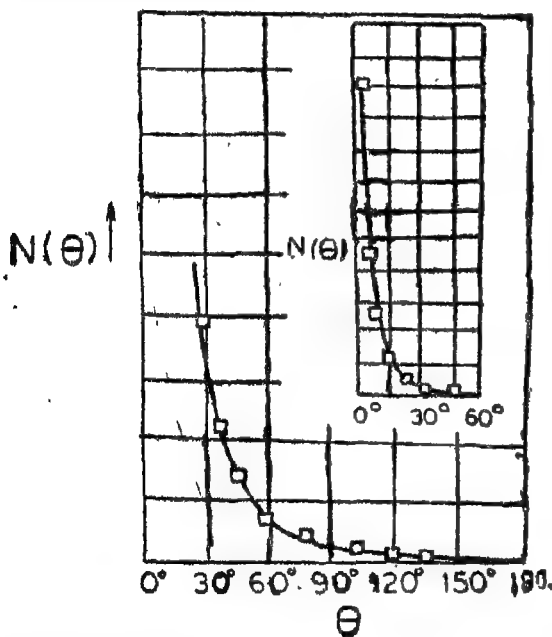
ऊपर के निष्कर्षों से स्पष्ट है कि किसी तत्व के परमाणु में इलेक्ट्रॉन एवं धन आवेश होते हैं। परन्तु पूरा परमाणु आवेशहीन एवं स्थायी होता है, अर्थात् उसमें धन एवं ऋण आवेशों का पूर्ण संतुलन है। यह स्पष्ट है कि परमाणु की अपनी संरचना होती है।

परमाणु का रदरफोर्डीय स्वरूप (Rutherford's Nucleus Model of an Atom)

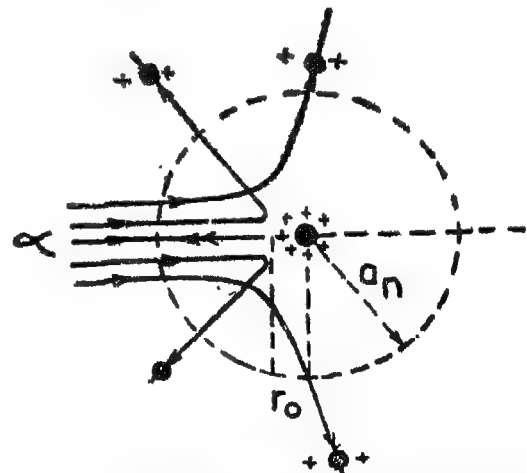
परमाणु के संरचनात्मक अध्ययन के लिए रदर-फोर्ड ने एक महत्वपूर्ण कदम उठाया। यह स्वरूप गाइगर तथा मार्सडन द्वारा किये गये पतली पन्नियों द्वारा α कणों (आल्फा कणों) के प्रकीर्णन पर आधारित था।

आल्फा कण हीलियम के ऐसे परमाणु होते हैं जिनसे दो इलेक्ट्रॉन निकल गये हों। यह हीलियम परमाणु की द्विआयनित अवस्था है। इसका आवेश 2e तथा द्रव्यमान प्रोट्रॉन के द्रव्यमान का लगभग चौगुना है।

चित्र 9.5 पतली पन्नियों द्वारा आल्फा कणों का प्रकीर्णन
AO=आल्फा कण किरणपुंज; B=पतली पन्नी, S परदा

पतली पन्नियों द्वारा α कणों के प्रकीर्णन की व्यवस्था को चित्र (9.5) में दिखाई गई है। समोर्जी α-कणों का एक संकीर्ण किरणपुंज परदे T पर गिरता है। पतली पन्नी B की अनुपस्थिति में किरणपुंज बिन्दुकित रेखा पर चलता हुआ परदे पर D बिन्दु पर पड़ता है। किरणपुंज के पथ में रखने से व्यक्तिगत रूप से कणों का प्रकीर्णन होता है और वे परदे पर विभिन्न स्थानों पर आपतित होते हैं α—कणों की मूल दिशा से उनका विचलन प्रकीर्णन के कोण को व्यक्त करता है। इस प्रयोग को एक निर्वातित कक्ष के भीतर करना पड़ता है क्योंकि अन्यथा α—कणों का प्रकीर्णन वायु

के परमाणुओं द्वारा भी होता है। परदे पर α—कणों की प्रकीर्णन स्थितियों के क्रमवीक्षण से AD रेखा की अपेक्षा α—कणों के प्रकीर्णन कोण का मान ज्ञात होता है। गाइगर और मार्सडन के प्रयोगों के फल को चित्र (9.6) में दिखाया गया है। वर्ग स्थान प्रयोग से प्राप्त बिन्दु हैं। चित्र में θ कोण से अधिक प्रकीर्णित α—कणों की संख्या $N(\theta)$ को θ कोण के साथ खींचा गया है। दत्तों की सुस्पष्टता के लिए $N(\theta)$ के लिए विभिन्न पैमानों को चुना गया है। चित्र (9.6) से निम्नलिखित निष्कर्ष निकलते हैं। α—कणों की अधिकांश संख्या छोटे कोणों से प्रकीर्णित होती हैं। 9000 में केवल एक कण का प्रकीर्णन कोण 90° से अधिक होता है। बहुत कम संख्या में ऐसे कण भी हैं जो अपने मूल पथ की ओर लौट आते हैं।

चित्र 9.6 N (θ) और θ के बीच ग्राफ □ = गाइगर एवं मार्सडन के दत्त।

α—कणों का प्रकीर्णन पन्नी के परमाणुओं के धन आवेशों और इलेक्ट्रॉनों के साथ कूलाम अन्योन्य क्रिया के कारण होता है। यदि परमाणु का धन आवेश तथा इलेक्ट्रॉन पूरे आयतन (अर्धव्यास 10 मी$^{-10}$) पर समान रूप से बँटे हुए हों तो आल्फा कणों का प्रकीर्णन कोण बहुत कम होता है और बड़े कोणों (> 90°) में प्रकीर्णन की संभावना नगण्य (10^{12} में 1 कण) है। अतः गाइगर और मार्सडन के प्रेक्षणों की व्याख्या, विशेषतः बड़े कोणों में प्रकीर्णन की व्याख्या, परमाणु के उपर्युक्त चित्र के आधार पर नहीं हो सकती।

आल्फा कणों के वृहत्कोणी प्रकीर्णन की संभावना तभी हो सकती है जब परमाणु का कुल धन आवेश Ze बहुत छोटे गोलीय आयतन में सीमित हो। परमाणु के आकार की अपेक्षा इस आयतन को बहुत छोटा होना चाहिए। रदरफोर्ड के सामान्य विचार थे जिनके कारण उसने परमाणु के एक नये स्वरूप-नाभिकीय स्वरूप का प्रतिपादन किया। इस स्वरूप को चित्र (9.7) में दिखाया गया है। केन्द्रीय वृत्त धन आवेश के संकेन्द्रण को व्यक्त करता है। यही परमाणु का नाभिक है। बाहरी वृत्त परमाणु के आकार को व्यक्त करता है। चित्र में आल्फा कणों के प्रकीर्णन को भी दिखाया गया है। चित्र नाभिक तथा परमाणु को एक ही पैमाने पर नहीं दिखाता है। उपर्युक्त स्वरूप में व्यावहारिक दृष्टि से परमाणु का सम्पूर्ण द्रव्यमान नाभिक में होता है और इलेक्ट्रॉन नाभिक के बाहर होते हैं।

चित्र 9.7 रदरफोर्ड के नाभिकीय मॉडल के अनुसार आल्फा कणों का प्रकीर्णन

नाभिक के अर्धव्यास का आसन्नतः अनुमान करने के लिए हम E.MeV ऊर्जा के आल्फा कण पर विचार करें जो नाभिक केन्द्र पर आपतित है। यह आल्फा कण नाभिक केन्द्र से न्यूनतम दूरी r_o तक पहुँच कर वापस आ जायेगा। इसका क्या कारण है ? इसका कारण यह है कि नाभिक एवं आल्फा कण के बीच कूलाम प्रतिकर्षण के कारण आल्फाकण की गतिज ऊर्जा का स्थितिज ऊर्जा में परिवर्तन हो जाता है। नाभिक के समीप पहुँचने की न्यूनतम दूरी r_o पर आल्फा कण की गतिज ऊर्जा आल्फा कण-नाभिक तंत्र की स्थितिज ऊर्जा के तुल्य है। अतः, हम पाते हैं कि

$$E = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{2kZe^2}{r_o}$$

जिसमें K एक अचर है और Z पन्नी के परमाणुओं की परमाणु संख्या है।

उदाहरण 9.1

यदि 6MeV ऊर्जा का आल्फा कण सोने के नाभिक से केन्द्र पर आपतित हो और 180° के कोण से प्रकीर्णित हो जाये तो सोने के नाभिक के अर्धव्यास का अनुमान कीजिये।

हम जानते हैं कि $Z_1 = 2, Z_2 = 79$, $k = 9 \times 10^9$ न्यूटन मी²/कूलाम²

$e = 1.60 \times 10^{-19}$ कूलाम;

$1 \text{ MeV} = 1.6 \times 10^{-13}$ जूल

$$\text{अतः } r_o = \frac{kZ_1 Z_2 e^2}{E}$$

$$= \frac{9 \times 10^9 \times 2 \times 79 \times (1.60 \times 10^{-19})}{6 \times 1.6 \times 10^{-13}}$$

$$= 1.60 \times 10^{-14} \text{मी}$$

इससे स्पष्ट है कि नाभिक का अर्धव्यास r_o से कम होगा। नाभिक के अर्धव्यास को फर्मी (f) मात्रकों में व्यक्त किया जाता है। एक $f = 10^{-14}$ मी।

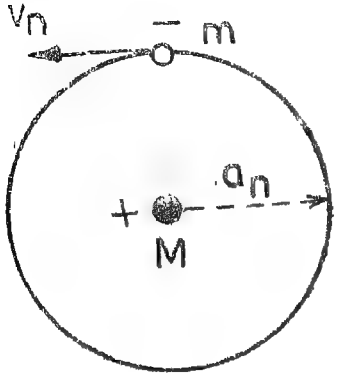
रदरफोर्ड के विश्लेषण से हम इस अन्तिम परिणाम पर पहुँचते हैं कि (क) परमाणु का धन आवेश एक बहुत छोटे आयतन में केन्द्रित रहता है जिसे नाभिक कहते हैं, (ख) नाभिक का अर्धव्यास कुछ एक फर्मी होता है तथा (ग) इलेक्ट्रॉन नाभिक के बाहर होते है।

9.4 हाइड्रोजन परमाणु के लिए बोर का सिद्धान्त (Bohr's Theory for the Hydrogen Atom)

परमाणु के नाभिकीय स्वरूप तथा प्लांक के क्वांटम सिद्धान्त को मानकर बोर ने हाइड्रोजन परमाणु द्वारा उत्सर्जित विकिरण की व्याख्या के लिए परमाणु का एक स्वरूप प्रतिपादित किया। उसके प्रतिपादित हाइड्रोजन परमाणु के स्वरूप को ग्रहीय स्वरूप भी कहते हैं, व्यक्त करता है कि इलेक्ट्रॉन नाभिक (हाइड्रोजन के लिए प्रोटीन) के चारों ओर विभिन्न अर्धव्यासों a_n के वृत्तों में घूमता रहता है। प्रयोगों में हाइड्रोजन परमाणु द्वारा विविक्त विकिरणों की एक श्रेणी का उत्सर्जन करता है जिसे स्पेक्ट्रमीय श्रेणी कहते है और हाइड्रोजन परमाणु स्थायी है। ये तथ्य चिरसम्मत सिद्धान्त की प्रागुक्ति के विरुद्ध हैं। बोर ने नये विचारों का प्रतिपादन किया जो चिरसम्मत दृष्टिकोण से क्रान्तिकारी है।

सिद्धान्त के अभिगृहीत (Postulates of the Theory)

इसके अभिगृहीत ये हैं : (i) चिरसम्मत सिद्धान्त द्वारा परमाणु में अनुमत संभाव्य वृत्तीय कक्षाओं में से इलेक्ट्रॉन केवल उन्हीं निश्चित कक्षाओं (स्थायी कक्षाओं) में घूम सकता है जो विहित नियमों के अनुरूप हैं, (ii) स्थायी कक्षाओं में इलेक्ट्रॉन ऊर्जा का उत्सर्जन नहीं करता, तथा (iii) कोई परमाणु विविक्त ऊर्जा के फोटानों का अवशोषण अथवा उत्सर्जन तभी कर सकता है जब परमाणु का इलेक्ट्रॉन क्रमशः निम्न कक्षाओं से उच्च कक्षाओं में जाये अथवा उच्च कक्षाओं से निम्न कक्षाओं में आये। इनमें से कोई भी अभिगृहीत दोलित्र के चिरसम्मत सिद्धान्त अथवा विद्युच्चुम्बकत्व के अनुसार नहीं है,

अपितु वे चिरसम्मत सिद्धान्त के प्रतिष्ठित नियमों का उल्लंघन करते हैं।

चित्र 9.8 हाइड्रोजन परमाणु का मॉडल

हाइड्रोजन परमाणु के एक रेखाचित्र को चित्र (9.8) में दिखाया गया है। कल्पना करें कि प्रोटॉन के चारों ओर अपनी nवीं कक्षा में घूमते हुए इलेक्ट्रॉन का अर्धव्यास तथा वेग क्रमशः a_n तथा v_n है। अर्धव्यास a_n को नाभिक के केन्द्र से नापा जाता है। गतिकीय संतुलन के लिए इलेक्ट्रॉन पर अभिकेन्द्री बल को स्थिर वैद्युतीय आकर्षण बल के तुल्य होना चाहिए जिससे इलेक्ट्रॉन कक्षा में घूमता रहे। अतः हम पाते हैं कि

$$\frac{kZe^2}{a^2_n} = \frac{mv^2_n}{a_n} \qquad (9.6)$$

जिसमें Z नाभिक की परमाणु संख्या है तथा m इलेक्ट्रॉन का द्रव्यमान है। यहाँ बोर ने एक नया नियम जोड़ा कि परमाणुतंत्र के कोणीय संवेग को $h/2\pi$ का पूर्णांक गुणज होना चाहिए, जिसमें h प्लांक का स्थिरांक है। अतः हाइड्रोजन परमाणु के लिए

$$L_n = mv_n\, a_n = \frac{nh}{2\pi} \qquad (9.7)$$

(9.6) तथा (9.7) समीकरणों से

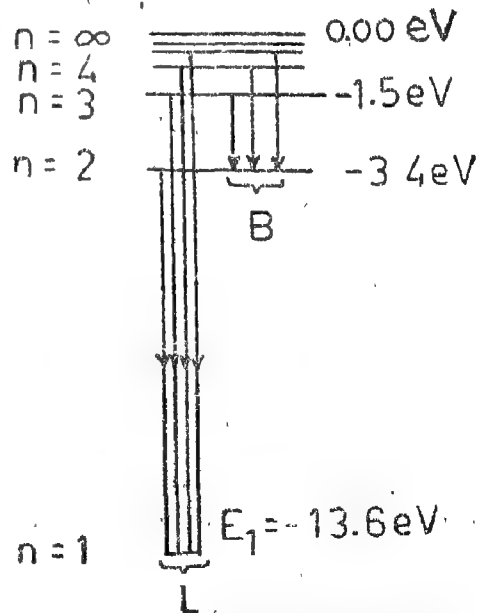
$$a_n = \frac{n^2h^2}{4\pi^2 mkZe^2} \text{ तथा } v_n = \frac{2\pi kZe^2}{nh} \qquad (9.8)$$

इलेक्ट्रॉन की निम्नतम कक्षा का अर्धव्यास 0.53A° है। प्रथम जो अभिगृहीत द्वारा अनुमत कक्षाएँ n को विभिन्न धन पूर्णांक मान देने से प्राप्त होती हैं। इसे तंत्र की मुख्य क्वांटम संख्या कहते है। समीकरण (9.6) के उपयोग से n वीं कक्षा में इलेक्ट्रान की गतिज ऊर्जा का मान $K = \frac{1}{2}mv^2_n = \frac{kZe^2}{2\,an}$ है तथा स्थितिज ऊर्जा का मान $\phi = -\frac{kZe^2}{a_n}$ है। अतः n वीं कक्षा में इलेक्ट्रान की कुल ऊर्जा है—

$$E_n = -\frac{kZe^2}{2a_n} = -\frac{2\pi^2 mk^2 Z^2 e^4}{n^2 h^2} \qquad (9.9)$$

तीसरे अभिगृहीत के उपयोग से यह दिखाया जा सकता है कि हाइड्रोजन परमाणु द्वारा उत्सर्जित विकिरण की आवृत्ति का मान है

$$\nu = \frac{2\pi^2 mk^2 Z^2 e^4}{h^3}\left(\frac{1}{n^2_1} - \frac{1}{n^2_2}\right) \qquad (9.10)$$

जिसमें n_1 तथा n_2 इलेक्ट्रान की क्रमशः निम्नतर तथा उच्चतर ऊर्जा अवस्थाओं की मुख्य क्वांटम संख्यायें है और n_1 की अपेक्षा n_2 बड़ा है। हाइड्रोजन परमाणु के ऊर्जा-स्तर आरेख को चित्र (9.9)

चित्र 9.9 हाइड्रोजन परमाणु के ऊर्जा स्तरों का रेखाचित्र B=बामर श्रेणी L=लाइमन श्रेणी

में दिखाया गया है। बामर तथा पाशन द्वारा प्रेक्षित स्पेक्ट्रम श्रेणियों की उत्पत्ति को आरेख में दिखाया गया है। प्रयोग से नापी आवृत्तियों का बहुत अच्छा मेल समीकरण (9.10) द्वारा प्राप्त आवृत्तियों से होता है। n = 1 कक्षा से n = ∝ कक्षा तक इलेक्ट्रान को ले जाने के लिए जितनी ऊर्जा की आवश्यकता होती है उसे हाइड्रोजन परमाणु की आयनन ऊर्जा और संगती विभव को आयनन विभव कहते हैं। हाइड्रोजन परमाणु के लिए इसका मान 13.6 eV है। कोई अच्छा सिद्धान्त न केवल ज्ञात तथ्यों की व्याख्या करता है अपितु नये तथ्यों और प्रेक्षणों की प्रागुक्ति करता है जिनका प्रायोगिक संस्थापन किया जा सके। नीचे हम दो प्रायोगिक प्रेक्षणों का उल्लेख करते हैं जो पूर्णतः सिद्धान्त के अनुरूप थे। ब्रैकेट (1922) तथा फंड (1924) ने हाइड्रोजन के लिए दो नई श्रेणियों की खोज की जो समीकरण (9.10) द्वारा दिये परिकलनों से ठीक-ठीक मेल खाती थीं। ये श्रेणियां सिद्धान्त द्वारा इस परिकलन के बाद देखी गयीं कि स्पेक्ट्रम के किस क्षेत्र में उन्हें देखने की आशा हो सकती है।

बोर के सिद्धान्त की त्रुटियां (Limitations of Bohr's Theory)

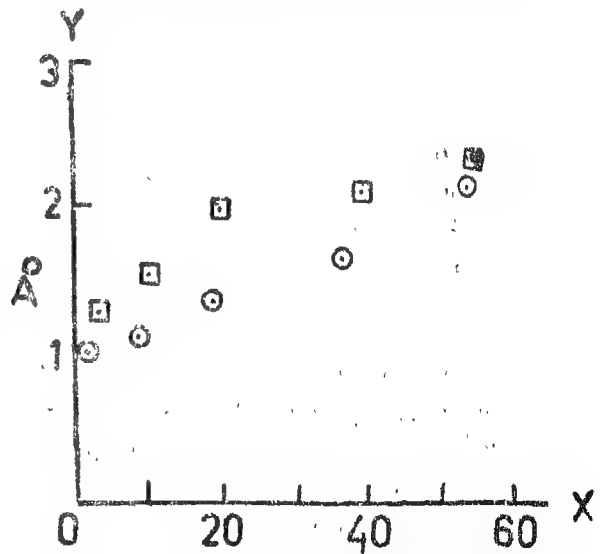
इसकी सफलता के बावजूद इस सिद्धान्त की अपनी सीमाएँ थीं। यह स्पष्ट नहीं है कि क्यों केवल वृत्ताकार कक्षाएँ चुनी जानी चाहिएँ जब दीर्घवृत्ताकार कक्षाएँ भी संभव हैं। इसका अर्थ यह है कि सिद्धान्त व्यापक और पूर्ण नहीं है। हाइड्रोजन की स्पेक्ट्रम रेखाएँ एकल नहीं हैं, अपितु वे सुसंकुलित रेखाओं के समूह हैं जिनकी आवृत्तियों में थोड़ा अन्तर है। इस सिद्धान्त से हाइड्रोजन की रेखाओं की इस सूक्ष्म संरचना की व्याख्या नहीं हो सकी।

अब हम जानते हैं कि परमाणु का ग्रहीय स्वरूप उसका उचित निरूपण नहीं है। इलेक्ट्रॉन की कक्षाओं को निश्चित रूप से निर्धारित नहीं किया जा सकता जैसे यहां किया गया है। इलेक्ट्रॉनों में तरंगों के गुण भी होते हैं और विभिन्न कक्षाओं में इलेक्ट्रॉन के आवेश के वितरण का चित्र इस सिद्धान्त में निरूपित चित्र से उस रूप में भिन्न है।

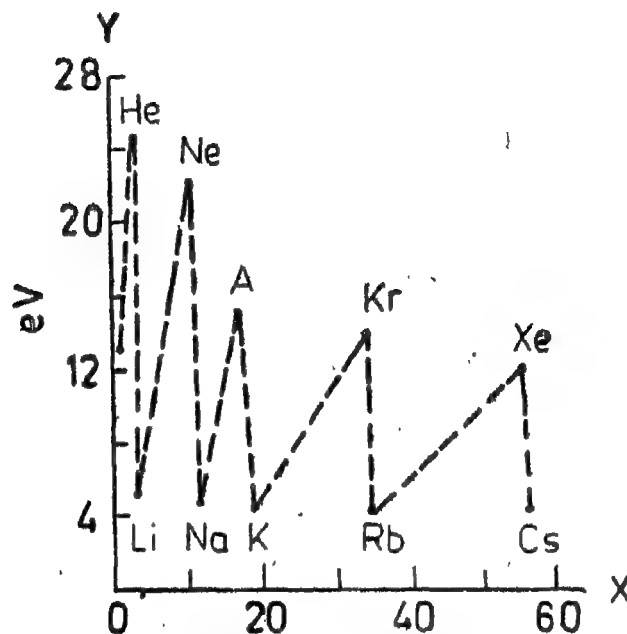
इन त्रुटियों के बावजूद यह गत्यात्मक स्वरूप आधुनिक भौतिकी परमाणु स्वरूपों के विकास के पथ-प्रदर्शन के लिए उपयोगी था।

9.4 परमाणुओं का इलेक्ट्रान-विन्यास (Electron Configuration in Atoms)

एक पूर्व अनुच्छेद में हम देख चुके हैं कि हाइड्रोजन परमाणु के बोर के सिद्धान्त द्वारा हाइड्रोजन परमाणु द्वारा विसर्जित विकिरण की संतोषजनक व्याख्या हो सकती है। अन्य परमाणुओं की संरचना और उनके स्पेक्ट्रमी विकिरण को समझने के लिए यह सिद्धान्त एक उपयोगी पथ-प्रदर्शक है।

बहुत से तत्वों के लिए परमाण्वीय अर्धव्यास और प्रथम आयनन विभव को नापा गया। इन राशियों को तत्वों की परमाणुसंख्या के फलन के रूप में क्रमशः चित्र (9.10) तथा (9.11) में दिखाया गया है। परमाणु संख्या के साथ-साथ परमाण्वीय अर्धव्यास घटना चाहिए

9.10 परमाणु संख्या तथा परमाणु अर्धव्यास के बीच ग्राफ
□ क्षार धातु, ⊙ = निष्क्रिय गैस
OX = परमाणु संख्या, OY = परमाणु अर्धव्यास

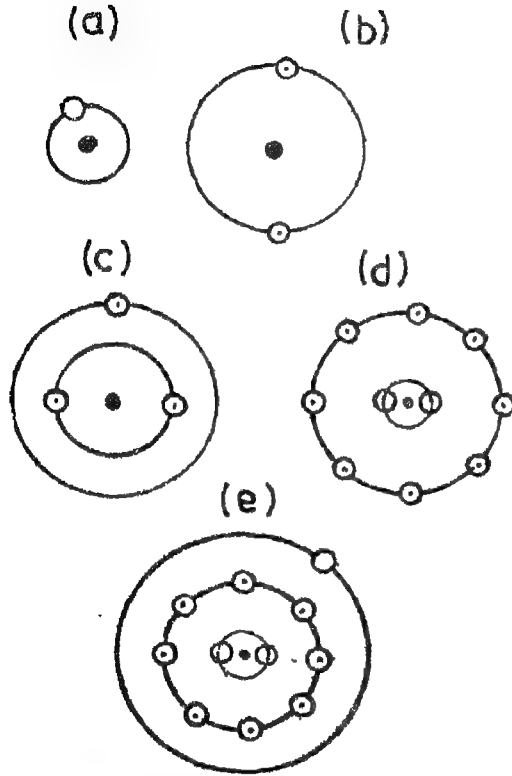
(समीकरण 9.8) तथा तत्व के आयनन विभव को आसन्नतः परमाणु के Z^2 के अनुपात में बढ़ना चाहिए ।

अपूर्ण कोश ($<2n^2$) के वाह्यतम इलेक्ट्रानों को संयोगी इलेक्ट्रॉन कहते हैं । भारी तत्वों में बहुतों में उपर्युक्त निर्धारित नियम से अन्तर पाया जाता है ।

चित्र 9.11 परमा संख्या एवं आयनन विभव क बीच ग्राफ
OX=परमाणु संख्या, OY—आयनन विभव

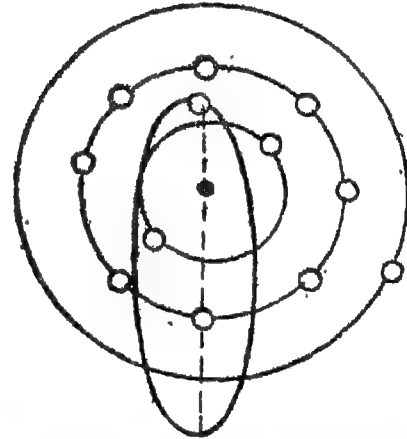
बोर के सिद्धान्त की ये प्रागुक्तियां प्रायोगिक प्रेक्षणों के अनुसार नहीं हैं । इसके अतिरिक्त हाइड्रोजन पारमाणु की स्पेक्ट्रम श्रेणियों तथा क्षार तत्वों की स्पेक्ट्रम श्रेणियों में कुछ सादृश्य हैं । इन तथ्यों के आधार पर बोर एवं स्टोनर इस निष्कर्ष पर पहुंचे कि परमाणु के सभी इलेक्ट्रॉन एक ही कक्षा में नहीं होते और किसी परमाणु की nवीं कक्षा में अधिक से अधिक $2n^2$ इलेक्ट्रॉन होते हैं । इसमें n मुख्य क्वांटम संख्या है । बोर एवं स्टोनर की योजना के अनुसार कुछ परमाणुओं के आरेखी स्वरूप को चित्र (9.12) में दिखाया गया है । उन कक्षाओं को जिनके लिए n=1, 2, 3, 4 आदि हैं क्रमशः K, L, M, N कोश कहते हैं तथा n=1 की कक्षा के इलेक्ट्रानों को इसी प्रकार K कोश के इलेक्ट्रॉन कहते हैं और इसी तरह अन्य कोषों के लिए भी ।

तथापिबोर एवं स्टोनर का आनुभाविक नियम इस विषय के भावी विकास के लिए उपयोगी पथ-प्रदर्शक है ।

पाउल का अपवर्जन नियम तथा क्वांटम संख्याएं (Pauli Exclusion Principle and Quantum Numbers)

यह मान कर कि इलेक्ट्रॉन की कक्षा वृत्ताकार होती है और मुख्य क्वांटम अंक n का सन्निवेश करके बोर ने परमाणू में इलेक्ट्रॉन ऊर्जा का मान प्राप्त किया । सोमरफेल्ड ने बोर के मॉडल को आगे बढ़ाया और उस व्यापक प्रश्न को हल किया जिसमें परमाणु में इलेक्ट्रॉन के लिए वृत्ताकार तथा दीर्घवृत्ताकार दोनों प्रकार की कक्षाएं संभव हैं । सोमरफेल्ड के सिद्धान्त में मुख्य क्वांटम अंक n को सुरक्षित रखा गया और

चित्र 9.12 परमाणु का मॉडल
(a) हाइड्रोजन (b) हीलियम (c) लिथियम (d) नियान
(e) सोडियम संकेत ●—नाभिक ⊙—इलेक्ट्रान

एक नये क्वांटम अंक k का सन्निवेश किया गया जिसे दिगंशी क्वांटम अंक कहते हैं। किसी भी दीर्घवृत्ताकार कक्षा के अर्ध अक्ष तथा अर्धलघु अक्ष का अनुपात उस कक्षा के लिए n/k अनुपात के तुल्य होता है। इसकी व्याख्या यह की गयी कि मुख्य क्वांटम अंक n दीर्घ-वृत्त के दीर्घ अक्ष का मापक है जबकि दिगंशी क्वांटम अंक लघु अक्ष का मापक है।

सोमरफेल्ड के सिद्धान्त में k के संभव मान 1, 2, ···n थे। k=0 वर्जित था क्योंकि इसका अर्थ होता कि इलेक्ट्रॉन नाभिक के भीतर से गुजरता है। k=0 का अर्थ होता कि कोणीय संवेग (mvr) शून्य के बराबर है और यह तभी संभव होता जब नाभिक से इलेक्ट्रान की दूरी शून्य हो। परन्तु परमाणुओं के स्पेक्ट्रम के प्रायोगिक निरीक्षण से यह देखा गया कि दिगंशी क्वांटम अंक में n के विभिन्न मान होने चाहिए शून्य भी सम्मिलित हो। यह बड़ी कठिनाई k के स्थान पर l क्वांटम अंक के सन्निवेश से हल हुई। नया क्वांटम अंक l दो दिगंशी क्वांटम अंक अथवा लघुकुल क्वांटम संख्या कहलाता है। किसी n के लिए l के संभव मान 0, 1, 2······n — 1 है। अर्थात् l=k—1 उदाहरण के लिए n=5 के लिए l के संभव मान है 0, 1, 2, 3, 4 ।

चित्र 9.13 सोडियम परमाणु में इलेक्ट्रान
n=3 इलेक्ट्रान पर ध्यान दीजिए, कक्षाएं वृत्ताकार एवं दीर्घवृत्ताकार हैं।

उच्च विभेदन स्पेक्ट्रमिकी के विकास से यह देखा गया कि उदाहरणतः बामर श्रेणी की कोई रेखा अकेली नहीं होती, अपितु इसमें छः रेखाएं हैं जो अलग-अलग और भिन्न-भिन्न हैं परन्तु जिनकी आवृत्ति आसन्नतः बोर की आवृत्ति के तुल्य है। इसकी व्याख्या के लिए यह आवश्यक हुआ कि इलेक्ट्रॉन की यह कल्पना की जाय कि वह अपने अक्ष पर घूमता है और उसकी प्रचक्रण संख्या S=½ है जहां प्रचक्रण क्वांटम संख्या कहलाता है।

जेमान जैसे स्पेक्ट्रमिकीविदों ने यह शोध किया कि जब उत्सर्जक गैस को प्रबल चुंबकीय क्षेत्र में

जाता है तब सामान्यतः एकल स्पेक्ट्रमी रेखाएं भी कई रेखाओं मे विपाटित हो जाती हैं। बोर के माडल में इसकी भी व्याख्या की जा सकी।

चुंबकीय क्षेत्र में कक्षा के अभिलम्ब होने पर किसी कक्षा में घूमते हुए इलेक्ट्रॉन का आचरण एक छोटे से चुंबक की तरह होता है। यह स्थिति धारा-वाही चालक जैसी होती है। किसी प्रबल चुंबकीय क्षेत्र में इन लघु चुंबकों की चेष्टा होती है कि वे अपने को चुंबकीय क्षेत्र की दिशा में कर लें। परन्तु यह देखा गया कि इलेक्ट्रॉनी चुंबकीय क्षेत्र (और इस तरह कक्षा का दिग्विन्यास) की दिशा किसी भी इच्छित दिशा में नही की जा सकती। यह भी क्वाण्टित होती है। इलेक्ट्रॉनी चुंबकीय क्षेत्र को उसके चुंबकीय संवेग द्वारा निर्धारित किया जा सकता है। यह l के अनुपात में होता है। किसी दिए l के लिये m_l के $(2l+1)$ पूर्णांकी मान $-l$ से $+l$ तक अर्थात् $-l, \ldots\ldots, 0, -1 -2\cdots l$ हो सकते हैं। उदाहरण के लिये $l=2$ के लिये m के पाँच मान $-2, -1, 0, 1, 2$ हो सकते हैं।

स्पेक्ट्रमी रेखाओं के विपाटन के संबन्ध में इलेक्ट्रॉन के प्रचक्रण की धारणा का सन्निवेश हुआ। कक्षा में घूमते हुये इलेक्ट्रॉन की तरह प्रचक्रणी इलेक्ट्रॉन से सम्बन्ध चुंबकीय क्षेत्र होता है। किसी चुंबकीय क्षेत्र की उपस्थिति में यह देखा गया कि इसकी भी विभिक्त दिशायें ही संभव हैं। स्पेक्ट्रमी रेखाओं की व्याख्या के लिये यह आवश्यक पाया गया कि प्रचक्रण के चुंबकीय संवेग को निरूपित करने वाले सदिश की केवल दो दिशायें संभव है, अर्थात् या तो क्षेत्र की दिशा में अथवा इसकी विपरीत दिशा में। इस तरह चौथी क्वांटम संख्या में m_s का प्रवेश हुआ जिसके केवल दो मान $+\frac{1}{2}$ अथवा $-\frac{1}{2}$ संभव हैं। निष्कर्ष यह है कि परमाणु में इलेक्ट्रॉन की अवस्था को पूर्णरूपेण निश्चित करने के लिये सिद्धान्ततः चार क्वाटम संख्याओं n, l, m_l एवं m_s की आवश्यकता है।

पाउली के अपवर्जन नियम के अनुसार किसी परमाणु में किन्हीं दो इलेक्ट्रॉनों की चारों क्वांटम संख्याएं एक समान नही हो सकती। परमाणु में इलेक्ट्रॉनों का विन्यास अपवर्जन नियम के अनुसार लिखा जा सकता है। n के एक ही मान वाले कुल इलेक्ट्रॉन एक कोश बनाते है। किसी कोश मे इलेक्ट्रॉनों की अधिकतम संख्या $2n^2$ हो सकती है। परम्परा के अनुसार $n=1$ कोश को k कोश कहते है, $n=2$ कोश L कोश है और आगे भी ऐसा ही नामकरण है। $l=0, 1, 2, 3\cdots$ आदि के इलेक्ट्रॉनों को क्रमशः s, p, d, f इलेक्ट्रॉन कहा जाता है। तत्वों के कुछ विन्यासों को सारणी 9.1 में स्पष्ट किया गया है जिसे आगे दिया जा रहा है।

सारणी 9.1

कोश	K	L		M		N	विन्यास
n	1	2		3		4	
l	0	0,	1	0, 1,	2,	0, 1, 2, 3	
तत्व	1						
1 H	2						$1s^1$
2 He	2						$1s^2$
3 Li	2	1					$1s^2 2s^1$
10 Ne	2	2	6				$1s^2 2s^2 2p = Ne$
11 Na	2	2	6	1			$Ne 3s^1$
18 Ar	2	2	6	2	6		$Ne 3s^2 3p^6 = Ar$
19 K	2	2	6	2	6	1	$Ar\ 4s^1$

p आदि प्रतीकों के ठीक पीछे की संख्या मुख्य क्वांटम संख्या अर्थात् कोश संख्या का द्योतक है और ऊपर का अंक ठीक इसमें इलेक्ट्रॉनों की संख्या को बतलाता है।

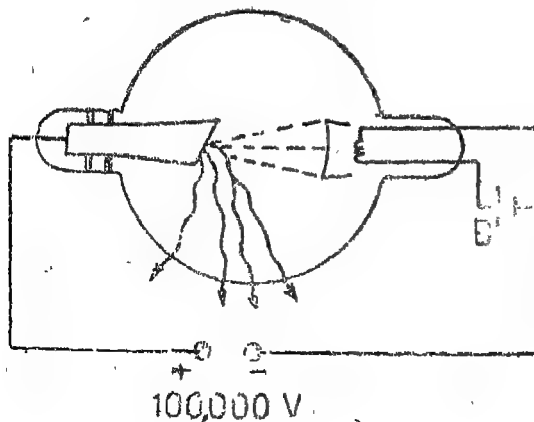
9.6 X-किरणें (X-rays)

रॉटजेन द्वारा गैसों के विद्युत विसर्जन के प्रक्रम का अध्ययन करते समय संयोग से X — किरणों की खोज हुई। विसर्जन नलिका के समीप रखे हुए प्लैटिनोसाउनाइड के क्रिस्टलों में बहुत चमकीली

प्रतिदीप्ति देखी गई। यद्यपि विसर्जन नलिका काले कागज से ढकी हुई थी ताकि नलिका में दृश्य प्रकाश न आ सके और उसे अँधेरे कमरे में रखा गया, यह देखा गया कि जब कभी नलिका से विसर्जन होता है तब क्रिस्टलों में चमकीली प्रतिदीप्ति होती है। स्पष्टत. यह इस बात का द्योतक था कि कोई अज्ञात विकिरण (X-किरणें) जो नलिका से निकल रही थीं क्रिस्टलों में प्रतिदीप्ति पैदा कर रही थीं। रांटजेन द्वारा और अधिक अध्ययन से यह सिद्ध हुआ कि ये X-किरणें विसर्जन नलिका की दीवार के साथ इलेक्ट्रॉनों की टक्कर से उत्पन्न होती है।

X-किरणों का उपयोग इतना महत्वपूर्ण था कि उनकी खोज के कुछ ही सप्ताह के भीतर उनका उपयोग चीड़-फाड़ के कार्यों में किया जाने लगा। अकेला यही अनुसंधान इस बात का अच्छा उदाहरण था कि किस प्रकार वैज्ञानिक अनुसंधान दैनिक जीवन में उपयोग होते हैं।

X-किरणों का उत्पादन (Production of X-rays)

आधुनिक काल की X-किरण की नलिकाओं तथा रांटजेन एवं अन्य लोगों द्वारा पहले उपयोग में लाई गई नलिकाओं में कोई समानता नहीं है। चित्र (9.14) में आधुनिक काल की X-किरण नलिका का आरेख

9.14 X-किरण नलिका

दिया गया है। कैथोड एवं ऐनोड, जिन्हें कांच के एक निर्वातित बर्तन के भीतर रखा जाता है, एक लाख वोल्ट के उच्च विभव से जुड़े रहते हैं। इलेक्ट्रोडों के बीच लगा विभव दोलनहीन (दिष्ट धारा वोल्टता) होता है। कैथोड की शक्ल अवतल दर्पण जैसी होती है जिससे इलेक्ट्रॉन किरणपुंज ऐनोड पर फोकसित हो जाता है। X-किरणें ऐनोड में एक छोटे से क्षेत्र से पैदा होती है और हर संभव दिशाओं में फैल जाती है।

कूलिज ने 1913 में X-किरण नलिका की बनावट में पर्याप्त सुधार किया। पीले कैथोड के भीतर एक तंतु घुमाया जाता है जिसे एक बैटरी अथवा निम्न वोल्टता के परिणामित्र के द्वारा तापदीप्त किया जाता है। व्यवस्था से कैथोड से इलेक्ट्रानों का एक तीव्र किरण-पुंज उत्पन्न होता है। ऐनोड को तांबे के ठोस छड़ से बनाया जाता है (चित्र 9.14)।

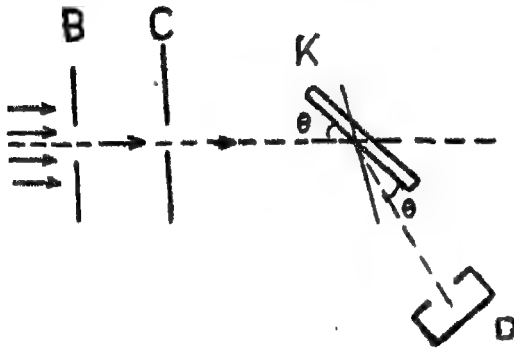
इलक्ट्रानों का फोकसित किरणपुंज ऐनोड को यथेष्ट रूप में गर्म कर देता है और अक्सर वह गल जाता है। इस कठिनाई से पार पाने के लिए प्लेटिनम जैसे उच्च गलनांक की धातु को ऐनोड में जड़ दिया जाता है। इस तरह इलेक्ट्रॉन का किरणपुंज प्लेटिनम के निशाने पर आपतित होता है और उत्पन्न ऊष्मा तांबे के ऐनोड द्वारा छितरा दी जाती हैं, अथवा कभी-कभी ऐनोड के चारों ओर जल शीतित कुंडली लपेट दी जाती है जिससे एनोड अत्यधिक गरम न हो।

लक्ष्य के प्लैटिनम द्वारा इलेक्ट्रॉन किरणपुंज की आकस्मिक रुकावट से X-किरण उत्पन्न होती है। इलेक्ट्रॉन किरणपुंज जितना ही अधिक तीव्र होता है उत्पन्न X-किरणों की तीव्रता उतनी ही अधिक होती है। X-किरणों का लक्षण (तरंगदैर्घ्य में वितरण) नलिका पर लगायी दिष्ट वोल्टता के ऊपर निर्भर करता है।

X-किरणों का स्पेक्ट्रम (X-ray Spectra)

X-किरणों के स्पेक्ट्रम के विवेचन के पहले यह जानना उपयोगी होगा कि X-किरणों का तरंगदैर्घ्य कैसे नापा जाता है। X-किरणें विद्युत्-चुंबकीय तरंगें

हैं जिनका तरंगदैर्घ्य एक एंगस्ट्राम (A°) से कुछ भाग से लेकर लगभग सौ एंगस्ट्राम तक होता है। क्रिस्टलों में परमाणुओं अथवा अणुओं का अन्तराल कुछ एंगस्ट्राम के बराबर होता है। अतः क्रिस्टलों का उपयोग X-किरणों का तरंगदैर्घ्य नापने के लिए वैसे ही किया जाता है जैसे ग्रेटिंग का उपयोग दृश्य विकिरण का तरंगदैर्घ्य ज्ञात करने के लिए किया जाता है।

X-किरणों का तरंगदैर्घ्य ज्ञात करने की एक युक्ति X-किरण स्पेक्ट्रमापी का सरलीकृत रेखाचित्र चित्र (9.15) में दिखाया गया है। एक नलिका की X-किरणें, जिन्हें अवरोधक रेखाछिद्रों B एवम् C के

9.15 X-किरण स्पेक्ट्रममापी का आरेख
K=क्रिस्टल, D=संसूचक

द्वारा सूक्ष्म रेखा-जैसा पतला कर दिया गया है, एक क्रिस्टल पर θ आपतन कोण पर गिरती हैं। परावर्तित X-किरणें एक संसूचक के स्तर से गुजरती हैं जैसा चित्र में दिखाया गया है। X-किरण नलिका तथा संसूचक की स्थितियाँ अचल रहती हैं और क्रिस्टल को एक घूर्णी मंच पर रखकर उसके केन्द्रीय अक्ष के गिर्द घुमाया जाता है। क्रिस्टल में अणुओं के बीच की दूरी d, X-किरणों के तरंगदैर्घ्य λ तथा θ कोण, जिस पर X-किरणें परावर्तित होती हैं, परस्पर ब्रैग के समीकरण द्वारा जुड़े हुए हैं। यह समीकरण है

$$2d \sin\theta = n\lambda \qquad (9.11)$$

जिसमें n स्पेक्ट्रम की कोटि है। किसी दी हुई कोटि n के लिए विभिन्न तरंगदैर्घ्य की X-किरणें विभिन्न θ कोणों पर परावर्तित होती हैं। d के ज्ञातमान तथा X-किरण स्पेक्ट्रम—मापी द्वारा θ के नापे मान से समीकरण (9.11) द्वारा λ के मान निकाले जाते हैं।

प्रायोगिक प्रेक्षणों से यह पता चलता है कि किसी X-किरण नलिका से निकली X-किरणें दो प्रकार की होती हैं—अविलक्षणिक X-किरणें तथा संतत X-किरणें।

अभिलक्षणिक X-किरणें (Characteristic X-rays)

इस समूह का स्पेक्ट्रम उन विकिरणों का बना होता है जो हाइड्रोजन जैसे परमाणुओं की स्पेक्ट्रमी रेखाओं की भांति विशिष्ट तीक्ष्ण तरंगदैर्घ्य की होती हैं। इस समूह के तरंगदैर्घ्य ऐनोड के परमाणुओं द्वारा उत्सर्जित अभिलक्षणिक विविक्त विकिरणों को निरूपित करते हैं। इस तरह अभिलक्षणिक X-किरणों का उपयोग ऐनोड के अणुओं को पहचानने में किया जाता है। यह अभिज्ञान परमाणुओं द्वारा उत्सर्जित दृश्य विकिरण द्वारा उनके अभिज्ञान की तरह ही है।

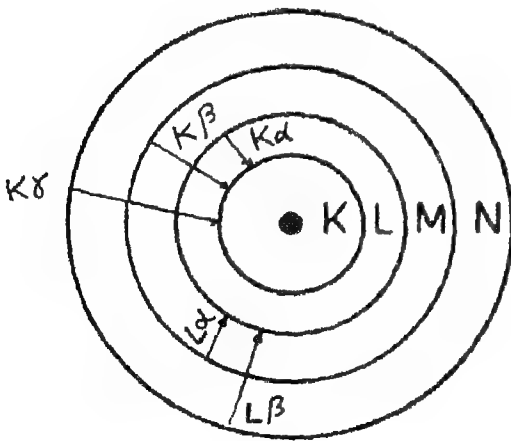
अभिलक्षणिक X-किरणों की उत्पत्ति (Origin of Characteristic X-rays)

अनुच्छेद (9.3) का समीकरण (9.10) परमाणुओं द्वारा उत्सर्जित विकिरण की आवृत्तियों को उस परमाणु के नियतांकों तथा उसके मुख्य क्वांटम संख्याओं द्वारा निरूपित करता है। इस व्यंजक को सरलीकृत रूप में यों लिखा जा सकता है

$$\nu = RZ^2\left(\frac{1}{n^2_1} - \frac{I}{n^2_2}\right)$$

जिसमें R एक नियतांक है तथा Z दिये तत्व के परमाणुओं की परमाणु संख्या है।

किसी नाभिक पर विचार करें जिसकी परमाणु संख्या Z है, इसके गिर्द इलेक्ट्रॉन पाउली के अपवर्जन नियम के अनुसार निर्धारित कक्षाओं में बँटे हुए हैं। यदि कोई आपतित इलेक्ट्रॉन परमाणु के K कोश

$(n=1)$ के इलेक्ट्रॉन से साथ टकराता है और इसे बहुत दूर हटा देता है (परमाणु के K कोश से एक इलेक्ट्रॉन हटाकर परमाणु को आयनित करना) तो K कोश में एक इलेक्ट्रॉन की कमी हो जायेगी। L, M अथवा N कोश से कोई इलेक्ट्रॉन K कोश में संक्रमित होगा और K कोश की पूर्ति $(2n^2)$ हो जायगी, इसी प्रकार L, M अथवा N के अपूर्ण कोश में अधिक ऊँचे कोश से इलेक्ट्रॉन आयेगा। ऊँचे पूर्ण कोशो से नीचे के अपूर्ण कोशों को पूरा करने के लिए इलेक्ट्रॉनो का संक्रमण तब तक होता रहेगा जब तक भीतरी कोश पूरे नही हो जाते। इस तरह कई संक्रमणों के फलस्वरूप विकिरण उत्पन्न होते रहते हैं। कुछ उत्सर्जित विकिरण तरंगदैर्ध्य में X-किरणों के क्षेत्र मे होता है। $n = 2, 3, 4$ आदि कोशों से $n=1$ कोश मे संक्रमण से उन X-किरणो की उत्पत्ति होती है जिन्हें क्रमश: K_α K_β K_γ आदि कहते हैं। इसी प्रकार $n=3, 4, 5$ आदि कोशों से $n=2$ कोश में संक्रमण से वे X-किरणें निकलती हैं जिन्हें L_α L_β L_γ आदि कहते हैं। इन संक्रमणों को चित्र 9.16 में दिखाया गया है। इस प्रकार परमाणुओं से अभिलक्षणिक

9.16 अभिलक्षणिक X-किरणों की उत्पत्ति। आरेख पैमाने के अनुसार नहीं है।

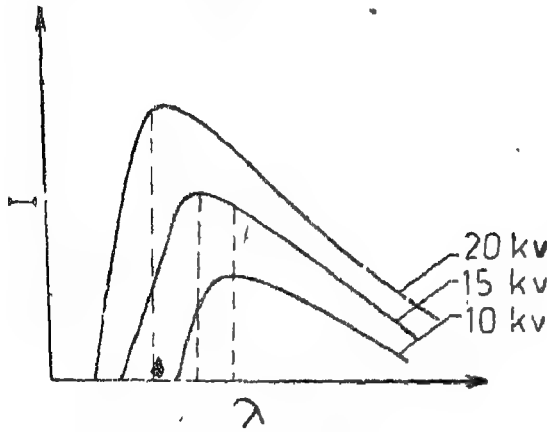
X-किरणों की उत्पत्ति हाइड्रोजन से लाइमैन, बामर श्रेणियों के संक्रमणों की तरह है। अभिलक्षणिक X-किरणें विविक्त विकिरण होती है और आवर्त-सारणी के प्रत्येक तत्व के लिए उनके तरंगदैर्ध्य अलग-अलग होते हैं। इस तरह हाइड्रोजन परमाणु के लिए प्राप्त किये गये समीकरण (9.10) द्वारा बड़े Z के परमाणुओं की अभिलक्षणिक X-किरणों के उत्पत्ति की व्याख्या हो जाती है। यदि हम तत्वों के K_α तथा K_β विकिरणों की आवृत्तियों का ग्राफ उन तत्वों की परमाणु संख्या के वर्ग के फलन के रूप में खींचें तो हमे $\nu=RZ^2$ सबन्ध का ऋजु रेखीय ग्राफ मिलता है। यह व्यंजक X-किरणों के लिए मोज्ले का विख्यात नियम है। यहाँ भी R का मान वही है जो समीकरण (9.10) में है।

संतत X-किरणें (Continuous X-rays)

इसके अतिरिक्त X-किरणों की नलिकाओं से सभी तरंगदैर्ध्यों की X-किरणें निकलती है जिनसे विकिरण की वह पृष्ठभूमि प्राप्त होती है जिस पर अभिलक्षणिक X-किरणें अध्यारोपित होती है। संतत विकिरण की इस पृष्ठभूमि को संतत X किरणें कहते हैं। संतत X-किरणों की एक महत्वपूर्ण विशेषता यह होती है कि वे एक विधि लघु तरंगदैर्ध्य पर अकस्मात् समाप्त हो जाती है। फोटोग्राफी के फिल्म के ऊपर यह आकस्मिक अंतक पृष्ठभूमि X-किरणों के लिए एक तीक्ष्ण कोर के रूप में दिखायी देता है। इस तीक्ष्ण कोर का तरंगदैर्ध्य केवल नलिका पर लगायी वोल्टता पर निर्भर करता है।

संततX-किरणों की उत्पत्ति (Origin of Continuous X-Rays)

यदि eV इलेक्ट्रॉन वोल्ट की ऊर्जा का कोई इलेक्ट्रॉन ऐनोड के लक्ष्य परमाणुओं पर पड़ रहा है तो इसकी अन्योन्य क्रिया परमाणु की कक्षाओं में घूमते हुए इलेक्ट्रॉनों के कूलॉम क्षेत्र के साथ और नाभिक के कूलॉम क्षेत्र के साथ होती है। चूँकि नाभिक पर संकेन्द्रित धन आवेश Ze होता है, आपाती इलेक्ट्रॉन पर इसकी अन्योन्य क्रिया बहुत बड़ी होती है और

इसके द्वारा आपाती इलेक्ट्रॉनों पर प्रयुक्त अन्योन्य क्रिया का बल Ze^2/r^2 होता है जिसमें r नाभिक एवं इलेक्ट्रॉनों के बीच दूरी है। इस बल के कारण आपाती इलेक्ट्रॉनों का त्वरण $\frac{Ze^2}{r^2} = ma$ होता है जिसमें m तथा a क्रमशः इलेक्ट्रॉन के द्रव्यमान एवं त्वरण है। विधुच्चुबकत्व के चिरसम्मत सिद्धान्त के अनुसार त्वरित इलेक्ट्रॉनों द्वाराविद्यु्चुम्बकीय विकिरण का उत्सर्जन होता है। इस प्रक्रम को ब्रेमस्ट्रॉलुंग (अवमंदक) प्रक्रम कहते हैं। इन उत्सर्जित X-किरणों के तरंगदैर्ध्य संतत होते हैं। अतः अवमंदक प्रक्रम से प्राप्त X-किरणों का ऊर्जा स्पेक्ट्रम संतत होता है और X-विकिरण की महत्तम आवृत्ति $h\nu = eV$ तभी मिलती है जब आपाती इलेक्ट्रॉन की कुल ऊर्जा eV एक फोटान को दी जाती है। संतत X-किरणों के प्रायोगिक फल (तरंगदैर्ध्यों में तीव्रता वितरण) को चित्र 9.17 में दिखाया है। प्रायोगिक फल ऊपर वर्णित चिरसम्मत सिद्धान्त के अनुकूल है।

9.17 संतत X-किरणों का स्पेक्ट्रम
I=तीव्रता, λ=तरंगदैर्ध्य

X-किरणों के गुण (Properties of X-rays)

X-किरणों का तकनीकी एवं अनुसंधान के लिए उपयोग उनकी (a) द्रव्य के अणुओं तथा परमाणुओं को आयनित करने की क्षमता (b) कुछ रासायनिक यौगिकों में प्रतिदीप्ति उत्पन्न करने की क्षमता (c) फोटोग्राफी की फिल्मों को प्रभावित करने की क्षमता तथा (d) ठोसों के भीतर से गुजर जाने की क्षमता के कारण है। यहाँ इनमें से कुछ गुणों का वर्णन इस दृष्टिकोण से किया जा रहा है कि बाद के अनुच्छेदों में वर्णित उनके उपयोग स्पष्ट हो जायें।

X-किरणों के किसी आवेशित विद्युदर्शी पर आपतित होने पर उसका आवेश विसर्जित हो जाता है। इस प्रेक्षण की व्याख्या यह है कि X-किरणें विद्युदर्शी के भीतर की वायु के अणुओं तथा परमाणुओं को आयनित कर देती हैं। अणुओं एवं परमाणुओं के आयनन से वायु में धन और ऋण आयन बनते है। अन्त मे जब ये आयन विद्युदर्शी के स्वर्णपत्र पर इकट्ठे होते हैं तो उसे विसर्जित कर देते हैं। इस प्रक्रम का उपयोग न केवल X-किरणों की जानकारी के लिए किया जाता है अपितु उनकी तीव्रता नापने के लिए भी किया जाता है। यह नाप इसलिए संभव है कि आयनन तीव्रता के अनुपात में होता है।

यदि X-किरणें फोटोग्राफी की विशिष्ट फिल्मों (X-किरण फिल्म) पर पड़ती हैं तो उनके जिलेटिन के माध्यम मे निलम्बित रजत हैलाइड के क्रिस्टलों को प्रभावित करती है। फिल्म को डवलप करने के बाद ये प्रभावित क्रिस्टल काले बिन्दुओं की तरह हो जाते हैं। इस तरह X-किरणों द्वारा बनाये प्रतिबिम्ब फिल्मों पर उभर आते हैं। फिल्म पर बने प्रतिबिम्ब की अपारदर्शिता से X-किरणों की तीव्रता नापी जा सकती है।

वस्तुओं के भीतर से गुजरने पर X-किरणों द्वारा बने प्रतिबिंब जिंक सल्फाइड जैसे रासायनिक यौगिकों से पुते परदों पर देखे जा सकते है। यह इस कारण संभव है कि X-किरणों के कारण जिंक सल्फाइड जैसे रासायनिक पदार्थों में प्रतिदीप्ति होती है और यह प्रतिदीप्ति प्रकाश के दृश्य क्षेत्र में होती है।

द्रव्य में X-किरणों की विभेदन क्षमता अथवा अवशोषण गुणांक (μ) को निम्नलिखित समीकरण द्वारा निरूपित किया जाता है :

$$I = I_0 e^{-\mu x} \qquad (9,12)$$

जिसमें I_0 तथा I क्रमशः द्रव्य में अवशोषण के पहले और बाद की X-किरणों की तीव्रताएँ हैं तथा x द्रव्य की मोटाई है। X-किरणों की तीव्रता ऊर्जा का वह परिमाण है जो प्रति इकाई काल में प्रति इकाई क्षेत्रफल से गुजरता है, जब कि क्षेत्रफल ऊर्जा के प्रवाह के अभिलंब होता है। अवशोषण गुणांक X-किरणों के तरंगदैर्घ्य λ एवं अवशोषक परमाणुओं की परमाणु संख्या का फलन होता है। X-किरणों के विशिष्ट तरंगदैर्घ्यों पर μ के मान मे तीक्ष्ण असांतत्यता दृष्टिगोचर होती है। असांतत्यताओं के मध्य में यह x का मसृणकारी फलन होता है (समीकरण 9.12) अवशोषण के संतत क्षेत्र में μ का परिवर्तन निम्नलिखित समीकरण द्वारा निरूपित होता है।

$$\mu = CZ^4\lambda^3\rho \qquad (9.13)$$

जिसमें ρ अवशोषक का घनत्व तथा C एक अचर है। इस क्षेत्र मे किसी दिये तत्व के लिये μ का परिवर्तन λ^3 के अनुपात में होता है और एकवर्णी X-किरणों के लिए विभिन्न तत्वों में Z^4 के अनुपात मे होता है)। अतः उच्च परमाणु संख्या के तत्व X-किरणों का अवशोषण निम्न परमाणु तत्वों की अपेक्षा बहुत अधिक करते हैं। उन X-किरणों को जिनकी विभेदन क्षमता बहुत अधिक होती है। अतिभेदी X-किरणें कहते है और जिनकी विभेदन क्षमता कम होती है अल्पभेदी X-किरणें कहते है। X-किरणों के अधिकांश अवशोषण अवशोषक परमाणुओं, अणुओं, क्रिस्टलों आदि के आयनन, उत्तेजन, प्रतिदीप्ति आदि के कारण होता है।

X-किरणों के उपयोग (Uses of X-rays)

शल्य शास्त्र में, चिकित्सा शास्त्र मे, इंजीनियरी मे तथा विशेषतः क्रिस्टलों की संरचना एवं व्यापक रूप से ठोस अवस्था के अध्ययन में X-किरणों का महत्वपूर्ण एवं उपयोगी योगदान है। यहाँ हम इन उपयोगों में से कुछ का वर्णन करते हैं।

हल्के तत्वों की अपेक्षा भारी तत्वों में X-किरणों का अवशोषण अधिक होता है। यदि X-किरणें हथेली जैसी किसी वस्तु से होकर गुजरे तो हड्डियों द्वारा उसके चारो ओर के ऊतकों की अपेक्षा अधिक अवशोषण होता है क्योंकि हड्डियो मे कैल्शियम तथा फास्फोरस जैसे तत्व होते है और ऊतकों मे हाइड्रोजन कार्बन आक्सीजन जैसे हलके तत्व होते है। अतः फोटोग्राफी की फिल्म पर अथवा किसी प्रतिदीप्ति परदे पर हथेली के प्रतिबिंब मे हाथ की हड्डियों की संरचना का विस्तार स्पष्ट रूप से दिखाई पड़ता है। ऐसे प्रतिबिंब मे अस्थियो के द्वारा, अस्थिभग, तथा जोड़ो पर संधिभग ज्ञात हो सकते है और शल्य-चिकित्सक मानव शरीर के किसी भाग के प्रतिबिंब का अध्ययन करके खराबी को ठीक कर सकते है।

9.18 X-किरणों द्वारा हाथ का फोटोग्राफ

X-किरणों से शरीर के ऊतकों को क्षति भी पहुँचती है क्योंकि इन किरणों से आण्विक शृंखलाओं एवं कोशिकाओं का आयनन होता है और वे टूट जाती हैं। मनुष्य के शरीर में कैन्सर जैसी कुछ अहितकर कोशिकाओं की वृद्धि जीवन के लिए खतरनाक

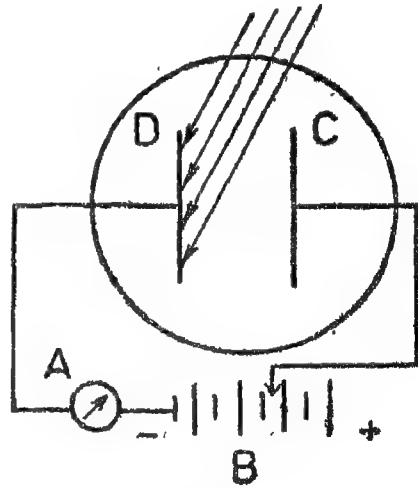
हो सकती है । X-किरणों द्वारा ऐसी कोशिकाओं को भी क्षति पहुँचाई जा सकती है । अगः X-किरणों के उचित उपचार से कैन्सरी ऊत्तकों की वृद्धि को कभी-कभी रोका जा सकता है और प्रारंभिक अवस्था में जानकारी होने पर रोग से पूर्ण लाभ भी हो सकता है ।

पहले हमने देखा कि X-किरण स्पेक्ट्रम मापी के उपयोग से इन किरणों का तरंगदैर्ध्य ज्ञात किया जा सकता है । इस विधि को उलट करके हम क्रिस्टलों में परमाणुओं एवं अणुओं के अन्तराल का अध्ययन कर सकते हैं । इस तरह एक वर्णी X-किरणों के उपयोग से क्रिस्टलों की संरचना (क्रिस्टल में परमाणुओं तथा अणुओं की व्यवस्था) का अध्ययन किया जाता है । इसी प्रकार की प्रक्रिया से कांच, हीरा, सूत, धातु आदि जैसे ठोसों की संरचना की भी जाँच की जाती है । X-किरणों द्वारा धातुओं एवं मिश्र धातुओं की त्रुटियों का भी अध्ययन किया जाता है क्योंकि त्रुटि-पूर्ण क्षेत्रों की संरचना सामान्य धातु तथा मिश्रधातु की संरचना से भिन्न होती है ।

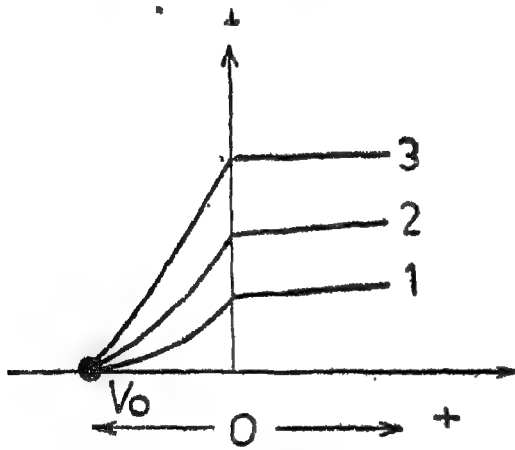
9.7 प्रकाश वैद्युत प्रभाव (Photo Electric Effect)

पदार्थ, मुख्यतः धातुएँ, उन पर विद्युचुम्बकीय विकिरण पड़ने पर X-किरणों, γ-किरणों, पराबैंगनी, दृश्य विकिरण तथा अवरक्त प्रकाश का अवशोषण कर लेता है और उसके पृष्ठ से इलेक्ट्रॉनों का उत्सर्जन होता है, इस परिघटना को प्रकाश वैद्युत प्रभाव कहते हैं और उत्सर्जित इलेक्ट्रॉन प्रकाश वैद्युत इलेक्ट्रॉन कहलाते हैं । यह प्रभाव उन व्यापक तथ्यों में से एक है जो विद्युचुम्बकीय विकिरण और द्रव्य की पारस्परिक क्रिया के फलस्वरूप होते हैं । विभिन्न पदार्थ विकिरण के विभिन्न तरंगदैर्घ्यों के क्षेत्रों से प्रदीप्त होने पर ही प्रकाश वैद्युत इलेक्ट्रॉनों का उत्सर्जन करते हैं । उदाहरण के लिए X-किरणों द्वारा भारी तत्वों के K एवं L कोशों से प्रकाश वैद्युत् इलेक्ट्रॉन निकलते हैं, तथा क्षार धातु दृश्य एवं परा-बैंगनी विकिरण के साथ प्रतिक्रिया करते हैं ।

प्रायोगिक अध्ययन (Experimental Study)

चित्र 9.19 में प्रकाश वैद्युत् उत्सर्जन के अध्ययन के लिए एक सरल युक्ति (बनाने में कठिन) को दिखाया गया है । स्फटिक के पात्र F में परिबद्ध जस्ते की दो पट्टिकाओं C एवं D को एक बैटरी B तथा माइक्रोमीटर A से जोड़ा गया है जैसा चित्र में दिखाया गया है । इलेक्ट्रोडों के साथ पात्र को फोटो नलिका कहते हैं, यदि कैथोड D पर प्रकाश डाला जाय तो धारा I प्रवाहित होती हैं पर ऐनोड C पर प्रकाश डालने पर परिपक्ष में कोई धारा नहीं बहती । इससे यह स्पष्ट है कि प्रकाश पड़ने पर ऋण आवेश्चित पट्टिका से आवेश का उत्सर्जन होता है और परिपथ में धारा का कारण इलेक्ट्रोडों के बीच इलेक्ट्रॉनों का प्रवाह है । I द्वारा धन इलेक्ट्रोड C पर इकट्ठे होने वाले इलेक्टॉनों की संख्या (I/e) की माप की जाती है ।

9.19 प्रकाश वैद्युत प्रभाव के अध्ययन के लिए प्रकाश नलिका का आरेख

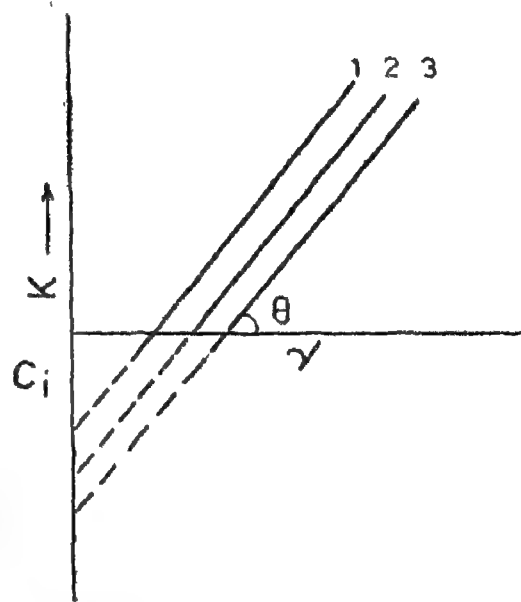
किसी धातु से उत्सर्जित इलेक्ट्रानों की संख्या एवं ऊर्जा की विकिरण की तीव्रता एवं आवृत्ति पर निर्भरता का ज्ञान इस प्रवाह के विस्तृत अध्ययन से होता है ।

प्रयोगों से यह देखा जाता है कि प्रकाश के स्पेक्ट्रम के किसी वर्ण के लिए माइक्रोअम्पीयरों में नापी प्रकाश वैद्युत धारा I का मान प्रकाश की तीव्रता के अनुपात में होता है। यदि इलेक्ट्रोड D की अपेक्षा C का विभव V हो तो V का घनात्मक एवं ऋणात्मक मान धीरे-धीरे परिवर्तित किया जाता है। विकिरण की तीव्रता तथा वोल्टता के फलन के रूप में प्रकाश वैद्युत धारा का परिवर्तन चित्र (9.20) में दिखाया गया है। चित्र मे वक्र 1,2 तथा 3 तीव्रता के क्रमशः बढ़ते हुए मानों के लिए हैं। हम देखते हैं

9.20 प्रकाश नलिका के इलेक्ट्रोडों के बीच वोल्टता के विरुद्ध धारा

कि (i) प्रकाश वैद्युत धारा I का मान V के एक निश्चित मान के ऊपर संतृप्त हो जाता है, संतृप्त धारा का मान प्रकाश की तीव्रता के अनुपात में है तथा (ii) ऋणात्मक मानों के लिए प्रकाश वैद्युत धारा कम हो जाती है और V के एक निश्चित ऋणात्मक मान V_0 के लिए शून्य हो जाती है। V_0 को मंदक विभव अथवा अंतक विभव कहते हैं। विकिरण की तीव्रता का मान कुछ भी होने पर भी V_0 के इस मान के नीचे कोई प्रकाश वैद्युत धारा नहीं प्रवाहित होती।

मंदक विभव V_0 धातु की प्रकृति तथा विकिरण की आवृत्ति दोनों पर निर्भर करता है। किसी दी हुई आवृत्ति ν के लिए हम उन प्रकाश वैद्युत इलेक्ट्रानों की अधिकतम गतिज ऊर्जा K_{max} नापते है जो ऐनोड C तक पहुँचते हैं। यह इस कारण होता है कि इलेक्ट्रानों को ऐसे विभव में चलना पड़ता है जो उनकी गति को रोकता है। अतः हम पाते हैं कि

$$E = K_{max} = \frac{1}{2} m u^2_{max} = eV_0 \qquad (9.14)$$

जिसमें e, m तथा u_{max} क्रमशः इलेक्ट्रान के आवेश, द्रव्यमान तथा महत्तम वेग है। K_{max} को जूल प्रतिकूलाम (V_0 वोल्टों में) के रूप में प्राप्त किया जा सकता है। मन्दक विभव V_0 की विकिरण की आवृत्ति ν के फलन के रूप मे नापा जाता है। फल को चित्र (9.21) में दिखाया गया है। चित्र के तीन विभिन्न धातुओं के लिए फल की तीन रेखाओं 1,2 तथा 3 द्वारा दिखाया गया है।

9.21 V_0/e के मात्रकों में मन्दक विभव और आवृत्ति के बीच ग्राफ

प्रत्येक धातु के लिए एक निश्चित आवृत्ति ν_t है जिसे देहली आवृत्ति कहते हैं और जिस पर नलिका में प्रकाश वैद्युत धारा शून्य होती है। इस आवृत्ति में ν_1, ν_2 तथा ν_3 ($\nu_3 > \nu_2 > \nu_1$) तीन धातुओं की देहली आवृत्तियाँ हैं। चित्र 9.21 की एक महत्वपूर्ण

विशेषता यह है कि सभी रेखाओं की प्रवणता, $\tan\theta = h$ एक ही है परन्तु विभिन्न धातुओं के लिए E अक्ष पर विभिन्न रेखाओं के अन्तः खंड भिन्न-भिन्न है। इन रेखाओं का समीकरण इस प्रकार लिखा जा सकता है।

$$E_i = h\nu + C_i \ldots \quad (9.15)$$

जिसमें E_i प्रकाश वैद्युत इलेक्ट्रान की ऊर्जा है तथा C_i धातु i के लिए E अक्ष पर अन्त. खण्ड है।

उन सभी परिणामों का सारांश यही लिखा जाता है जिनकी व्याख्या किसी भी प्रकाश वैद्युत प्रभाव के सिद्धान्त द्वारा होने चाहिए : (i) किसी भी धातु तथा प्रकाश की किसी भी आवृत्ति के लिए प्रकाश वैद्युत इलेक्ट्रानों की संख्या प्रकाश की तीव्रता के अनुपात मे होती है। (ii) प्रत्येक पदार्थ के लिए एक निश्चित देहली आवृत्ति ν_i होती है जिसके नीचे प्रकाश की किसी भी तीव्रता के लिए प्रकाशिक इलेक्ट्रान नहीं निकलते और (iii) देहली आवृत्ति के ऊपर ऊर्जा इलेक्ट्रानों की ऊर्जा प्रकाश की आवृत्ति के अनुपात में होती है।

प्रकाश वैद्युत प्रभाव के लिए आइन्स्टाइन का सिद्धान्त (Einstein Theory for Photo Electric Effect)

क्वाँटम सिद्धान्त के प्रतिपादन के पहले ऊपर के तथ्यों की व्याख्या विद्युत्चुम्बकीय के चिरसम्मत सिद्धान्त के आधार पर करने के प्रयत्न किए गए। इस सिद्धान्त के नुसार विद्युत्चुम्बकीय तरंगों (प्रकाश) की तीव्रता तरंगों के आयाम का फलन है। प्रकाश को तरंग सिद्धान्त से बहुत से तथ्यों की व्याख्या होती है, जैसे प्रकाश का व्यतिकरण, विवर्तन आदि। यदि प्रकाशिक इलेक्ट्रॉनों का उत्सर्जन विद्युत्चुम्बकीय तरंगों एवं धातु के इलेक्ट्रॉनों की पारस्परिक क्रिया के कारण है तो प्रकाशिक इलेक्ट्रॉनो की संख्या ऊर्जा दोनों को प्रकाश की तीव्रता के ऊपर ही निर्भर करना चाहिए। परन्तु यह प्रायोगिक फलों मे विपरीत है। चिरसम्मत सिद्धान्त द्वारा प्रकाश वैद्युत प्रवाह के प्रेक्षित फलों की व्याख्या नही की जा सकती।

1900 में प्लाँक ने यह अभिगृहीत प्रस्तुत किया कि ν आवृत्ति के प्रकाश-तरंग के साथ E ऊर्जा संबद्ध होनी है जिसका समीकरण है $E = h\nu$ जिसमे h प्लॉक नियतांक है। E ऊर्जा के प्रत्येक प्रकाश तरंग को फोटान कहते है। इस तसवीर के अनुसार, ν_i आवृत्ति के एक वर्णी प्रकाश की तीव्रता निश्चित ऊर्जा E_i के फोटानों की संख्या को माना जाता है।

प्रकाश वैद्युत प्रभाव की व्याख्या करने के लिए आइन्टाइन ने सन् 1905 में प्लांक के क्वांटम सिद्धान्त का उपयोग किया। उसका सिद्धान्त निम्नलिखित है। धातु में प्रकाश के प्रत्येक फोटान के लिए अवशोषित होने पर एक प्रकाशिकी इलेक्ट्रान उत्सर्जित होता है। धातु के पृष्ठ के भीतर से इलेक्ट्रॉन को निकालने के लिए ऊर्जा की आवश्यकता होती है। अत. इलेक्ट्रॉन की गतिज ऊर्जा का निम्न समीकरण है।

$$K = h\nu - W \quad (9.15)$$

इस समीकरण को आइन्टाइन का समीकरण भी कहते हैं। W को धातु का कार्य-फलन कहा जाता है। धातु के पृष्ठ के बाहर निकलने में इलेक्ट्रॉन की ऊर्जा का यह द्योतक है। सामान्यत: आपतित प्रकाश कुछ शत परमाण्विक स्तरी (10^{-8} मी) तक पृष्ठ के भीतर घुस जाता है और विभिन्न गहराइयों से उत्सर्जित इलेक्ट्रॉनों की टक्कर होती है जिसके फलस्वरूप धातु के पृष्ठ के बाहर इलेक्ट्रॉनों का विभिन्न ऊर्जाओं में वितरण होता है। इस तथ्य के कारण विभव V के साथ I का परिवर्तन होता है (चित्र 9.20)। न्यूनतम ऊर्जा अथवा फोटान की देहली आवृत्ति वह है जिसके कारण इलेक्ट्रॉन केवल धातु के पृष्ठ के बाहर आ जाता है ($K = 0$) और इसे धातु के कार्य-फलन के तुल्य होना चाहिए (अर्थात् समीकरण 9.16 के अनुसार $h\nu_i = W$ देहली आवृत्ति के नीचे ($\nu < < W/h$) प्रकाश की किसी भी तीव्रता के लिए प्रकाशिकी इलेक्ट्रॉनों का उत्सर्जन नहीं होता। देहली आवृत्ति के ऊपर रेखिकत: आश्रित होती है और प्रकाशिकी इलेक्ट्रॉनों की संख्या प्रकाश की तीव्रता के अनुपात में होती है। इस प्रकार सभी आयोगिक परिणामों की व्याख्या आइन्स्टाइन के सिद्धान्त के द्वारा हो जाती है।

नीचे की सारणी में कुछ धातुओं के कार्य-फलन को दिया गया है।

सारणी 9.2

धातु	Na	K	Ce	Zn	Fe	Ni
w(eV)	2.5	2.3	1.8	3.4	4.9	5.9

प्रकाश नलिकाओं के उपयोग (Applications of Photo Tubes)

कोई प्रकाश नलिका प्रकाशिक ऊर्जा को विद्युत ऊर्जा में परिवर्तित करती है। दूरदर्शन प्रेषित्रों के स्टेशनों मे इनका होना अनिवार्य है। किसी वस्तु अथवा नाटक के दृश्य मे परावर्तित प्रकाश को उचित प्रकाश नलिका पर फोकसित किया जाता है। संचरण के लिए विद्युत ऊर्जा को फिर विद्युतच्चुम्बकीय तरंगों के उचित स्वरूप में परिवर्तित किया जाता है।

सिनेमा फिल्मों में चित्र एवं ध्वनि दो प्रक्रमों का तुल्यकालन होता है। फिल्मों पर दृश्यों एवं कार्य-चित्रों का फोटो लेना सुविदित है पर कार्य के साथ समकालित ध्वनि को अंकित करना सिनेमा उद्योग के लिए अनिवार्य है। ध्वनितरंगों को विद्युत तरंगों में और विद्युत तरंगों को फिर प्रकाश तरंगों में परिवर्तित किया जाता है। फिल्म पर इन प्रकाश तरंगों अथवा संकेतों का फोटो कार्य चित्र के साथ लिया जाता है। सिनेमा गृहों में इसके प्रतिलोम प्रक्रम के द्वारा चित्र के साथ समकालित ध्वनि मिलती है।

प्रकाश सेलों की सहायता से किसी दरवाजे के बीच के बाधित किरणपुंज (निश्चयतः अदृश्य) का उपयोग चोर घंटी बजाने के लिए किया जा सकता है।

प्रकाश नलिकाओं की सुग्राहिता आँखों की अपेक्षा बहुत अधिक होती है। इस कारण खगोलीय परिघटनाओं जैसे ताप तथा तारों का स्पेक्ट्रम का अध्ययन करने के लिए प्रकाश सेलों का उपयोग बहुत लाभप्रद होता है। भट्टियों के ताप तथा रासायनिक क्रियाओं के नियंत्रण में इसका उपयोग हो सकता है। स्वचालित नियंत्रण तथा सड़कों के प्रकाशन, यातायात के संकेतों तथा मोटरगाड़ियों की चाल जैसे नियंत्रण तंत्रो में इसका उपयोग हो सकता है।

9.8 विकिरण एवं द्रव्य की द्वैत प्रकृति (Dual Nature of Radiation and Matter)

विकिरण की द्वैत प्रकृति (Dual Nature of Radiation)

यह प्रमाणित है कि विद्युच्चुम्बकीय विकिरण का आचरण ऐसा है मानो वह तरंगों का बना हो। व्यक्तिकरण, विवर्तन आदि परिणाम विकिरण के तरंगीय गुणों के कारण होते है। प्रकाश वैद्युत प्रभाव में कोई एकल फोटान (तरंग विकिरण) अपनी कुल ऊर्जा किसी एकल इलेक्ट्रॉन को दे देता है और इस ऊर्जा का कुछ अंश इलेक्ट्रॉन की गतिज ऊर्जा के रूप में प्रकट होता है। ऐसा प्रतीत होता है मानो एक टक्कर में किसी कण ने किसी अन्य कण को सारी ऊर्जा दे दी हो। इस प्रकार प्रकाश वैद्युत प्रभाव विकिरण का आचरण कण जैसा होता है। यह बहुत रहस्यमय है कि विकिरण में कण और तरंग दोनों ही के लक्षण हों जो परस्पर असंगत है। मूल प्रश्न यह है कि विकिरण तरंग है अथवा कण है अथवा दोनों ही है।

डी ब्रागली की तरंगें (1923) (de Broglie Waves)

द्रव्य के मूलभूत संरचनात्मक घटकों जैसे इलेक्ट्रॉन प्रोटानों, तथा न्यूट्रॉनों का आचरण कण जैसा होता है। भौतिक विश्व के आधारभूत स्वरूप द्रव्यमान एवं ऊर्जा हैं जिनमें घनिष्ठ सम्बन्ध है (आइन्स्टाइन का द्रव्यमान ऊर्जा संबन्ध) अतः द्रव्य तथा ऊर्जा में परस्पर सममिति होनी चाहिये फिर विकिरण ऊर्जा में तरंग तथा कण की द्वैत प्रकृति है, और इस कारण डी ब्रागली ने सममिति के दृष्टिकोण से यह प्रागुक्ति की कि द्रव्य में भी यह द्वैत प्रकृति होनी चाहिए। गतिमान द्रव्य के साथ तरंगें भी होनी चाहियें जिन्हें डी ब्रागली तरंग कहते हैं। कई तर्कों के फलस्वरूप उसने द्रव्य के तरंगदैर्ध्य और

उसके संवेग के बीच संबन्ध स्थापित किया। यह संबन्ध है

$$\lambda = h/mv \quad (9.17)$$

जिसमें h प्लांक का नियतांक है।

डी ब्रागली तरंगों का प्रायोगिक सत्यापन (Experimental Verification of de Broglie Waves)

किसी इलेक्ट्रॉन किरणपुंज के लिए व्यक्तिकरण एवं विवर्तन प्रभावों की जाँच वैसे ही की जाती है जैसे प्रकाश एवं X-किरणों के पुंज के लिए की जाती है। डी ब्रागली तरंगों का अभिज्ञान प्राप्त करने के लिए हमें v वेग से चलने वाले इलक्ट्रॉन से संबंधित तरंग-दैर्ध्य का अनुमान करना चाहिए। नीचे हल किये हुए उदाहरण से यह उद्देश्य पूरा हो जायेगा।

उदाहरण 9.2

300 वोल्ट के क्रियान्तर से गुजरने वाले इलेक्ट्रॉन पुंज से संबंधित डी ब्रागली तरंगों के तरंगदैर्ध्य की गणना कीजिये। मान लीजिये कि इलेक्ट्रॉन का प्रारम्भिक वेग शून्य है।

$$v = \sqrt{\frac{2Ve}{m}}$$

$$= \left(\frac{2 \times 300 \text{वोल्ट} \times 1.6 \times 10^{-19} \text{कूलाम}}{9.11 \times 10^{-31} \text{ किलोग्राम}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= 1.03 \times 10^{7} \text{ मीसे}^{-1}$$

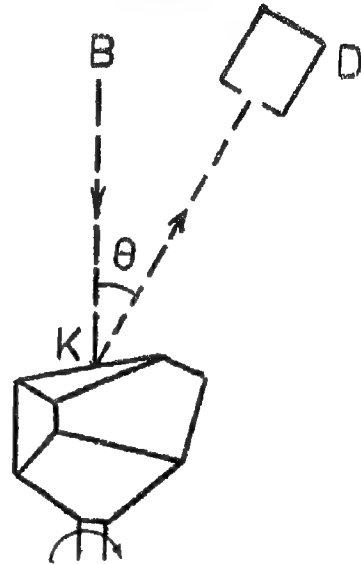
$$\text{अतः } \lambda = \frac{h}{mv} = \frac{6.63 \times 10^{-34} \text{ जूल सेकिंड}}{9.11 \times 10^{-31} \text{किग्रा} \times 1.03 \times 10^{7} \text{से}^{-1}}$$

$$= 0.71 \times 10^{-10} \; \frac{\text{किलोग्राम मी}^{2}\text{सेकिंड}^{-1}}{\text{किलोग्राम मीसे}^{-1}}$$

$$= 0.71 \times 10^{-10} \text{मी} = 0.71 A^{\circ}$$

इतने छोटे तरंगदैर्ध्यों को नापने के लिए प्रकाशिक ग्रेटिंग बिल्कुल व्यर्थ है परन्तु क्रिस्टल आदर्शत: उपयुक्त हैं (X-किरणों पर अनुच्छेद 9.6 देखें) डी ब्रागली तरंगों की वास्तविकता की जाँच के लिए कुछ प्रायोगिक विधियों का वर्णन हम आगे कर रहे हैं।

डेविसन एवं गर्मर के प्रयोग (1927) (Devisson and Germer Experiment)

डेविसन एवं गर्मर की प्रायोगिक व्यवस्था का आरेख चित्र (9.22) में दिखाया गया है। 50eV

9.22 इलेक्ट्रॉनों की तरग प्रकृति के अध्ययन के लिए डेविसन तथा गर्मर का प्रयोग
B=इलेक्ट्रॉन किरणपुंज, K=क्रिस्टल, D—संसूचक

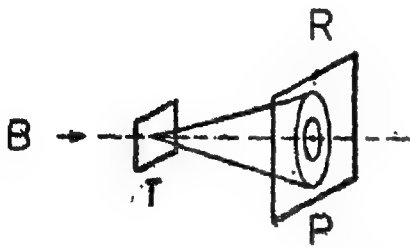
ऊर्जा के इलेक्ट्रॉन, जो एक इलेक्ट्रान प्रक्षपी से निकलते हैं, निकेल क्लोराइड के क्रिस्टल के पृष्ठ पर अभिलंबत: पड़ते हैं। विवर्तित किरणपुंज एक संसूचक द्वारा ग्रहण किया जाता है और नापा जाता है। जैसा चित्र में दिखाया गया है इलेक्ट्रॉनों की तीव्रता θ के फलन के रूप में नापी जाती है। θ के कुछ निश्चित मानों के लिए तीव्रता अधिकतम होती है। θ के ये मान निम्न समीकरण के अनुरूप हैं।

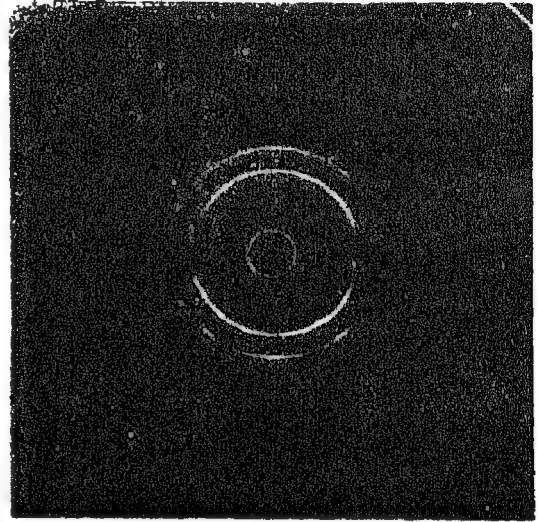
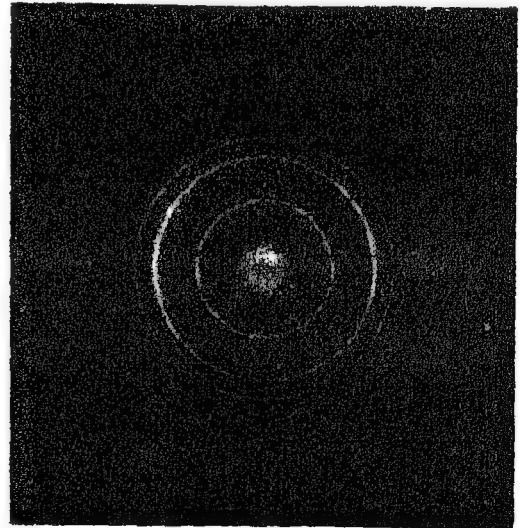
$$n\lambda = 2d \sin\theta$$

जिसमें n विवर्तन की कोटि है तथा d क्रिस्टल में परमाणुओं का अन्तराल है। इलेक्ट्रॉनों के तरंगदैर्ध्य (1.75A°) की गणना डी ब्रागली समीकरण से की

जाती है और स्पेक्ट्रम की किसी विशेष कोटि n के लिए तथा क्रिस्टल में परमाण्विक अंतराल 2.5A° के लिए विवर्तित इलेक्ट्रॉनों की अधिकतम तीव्रता के प्रत्याशित कोणों की गणना की जाती है। स्पेक्ट्रम की प्रथम कोटि के लिए θ के नापे हुए मानों तथा गणित से प्राप्त मानों में अनुरूपता है जिससे यह सिद्ध होता है कि गतिमान इलेक्ट्रॉनों के लिए डी ब्रागली तरंगों का अस्तित्व है।

टाम्सन का प्रयोग (Thomson's Experiment)

इस प्रयोग की युक्ति को चित्र 9.23 में दिखाया गया है। इलेक्ट्रॉन प्लैटिनम की एक पन्नी पर पड़ते है। जैसा चित्र में निर्देशित है, पन्नी के पीछे फोटो लेने की एक पट्टिका रखी है। प्लैटिनम की पहली एकल क्रिस्टलों की बनी है जिनकी दिशाएँ अनियमित है। अतः इलेक्ट्रॉनों के विवर्तन का नमूना संकेन्द्रिक वृत्तों के रूप में होता है जहाँ इलेक्ट्रॉन का घनत्व अधिकतम होता है। यह नमूना वैसा ही है जैसा रवाहीन ठोसों के लिए X किरणों के साथ देखा जाता है (देखिये चित्र 9.24)। इस प्रयोग से भी डी ब्रागली तरंगों का अस्तित्व सिद्ध हुआ तथा डी ब्रागली संबंध की यथार्थता सिद्ध हुई।

चित्र 9.23 इलेक्ट्रान किरणपुंज के विवर्तन के लिए टामसन का प्रयोग B=इलेक्ट्रान किरणपुंज, T=पतली पन्नी, P=फोटोपट्टिका R=विवर्तन वलय

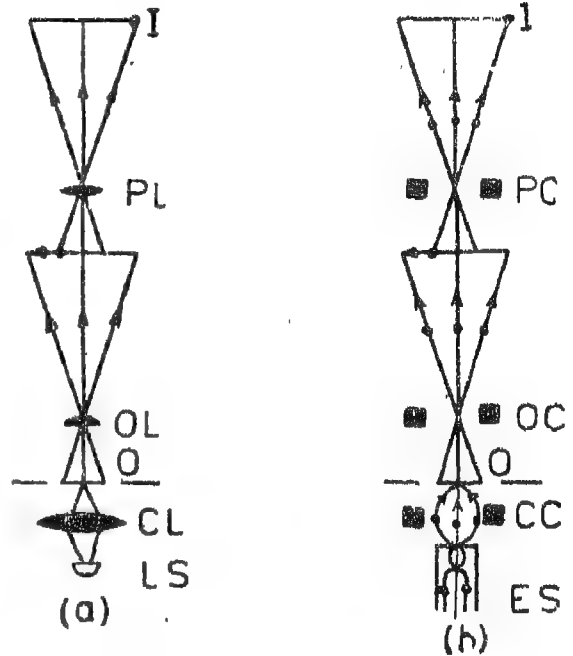
बाद को ईस्टरमान तथा स्टर्न ने ऐसे ही प्रयोग किये जिनमें इलेक्ट्रॉनों के स्थान पर हीलियम परमाणु एवं हाइड्रोजन अणु का उपयोग किया गया। उनके परिणाम ऊपर के दो प्रयोगों के परिणामों जैसे ही थे। अब हम जानते है कि सभी गतिमान कणों में तरंग के गुण होते हैं जो डी ब्रागली के संबंध के अनुसार होते हैं। इस प्रकार द्रव्य की द्वैत प्रकृति भी सुदृढ़ रुप से प्रमाणित हो गयी है।

चित्र 9.24 (a) X-किरणों द्वारा तांबे के तार का लावे फोटोग्राफ (संचरण)

(b) इलेक्ट्रॉनों के विवर्तन द्वारा तांबे के तार का नमूना (संचरण)

डी ब्रागली तरंगों के उपयोग (Uses of de-Broglie Waves)

जो इलेक्ट्रॉन V वोल्ट के विभवान्तर से गुजरते हैं उनके लिए तरंगदैर्ध्य का व्यंजक है

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2me}} \quad \frac{1}{\sqrt{V}}$$

जिसमें m, e तथा h के सामान्य अर्थ हैं। इन नियतांकों का मान रखने पर तथा तरंगदैर्ध्य को A° मात्रकों में रखने पर हम पाते हैं कि $\lambda = \frac{1.23}{\sqrt{V}}$ A°। उच्च ऊर्जा के इलेक्ट्रॉनों के लिए हम λ का मान अपनी इच्छानुसार छोटा कर सकते है। किसी प्रकाशिक यंत्र की विभेदन क्षमता प्रकाश के तरंगदैर्ध्य पर निर्भर करती है। प्रकाशिक सूक्ष्मदर्शियों की आवर्धन क्षमता ~ 1500 होती है एवं उनकी विभेदन क्षमता एक माइक्रोमीटर की होती है। इन संख्याओं का मान मुख्यतः प्रकाश के तरंगदैर्ध्य के कारण सीमित रहता है। अल्प तरंगदैर्ध्य की डी ब्रागली तरंगों का उपयोग अधिक आवर्धन तथा बहुत सूक्ष्म वस्तुओं के विभेदन के लिए किया जा सकता है।

एक यंत्र जिसमें इलेक्ट्रॉन किरण पुंज का उपयोग बहुत सूक्ष्म वस्तुओं जैसे विषाणु, रोगाणु, ठोसों की क्रिस्टली संरचना का अध्ययन करने के लिए किया गया है इलेक्ट्रॉन सूक्ष्मदर्शी कहलाता है। एक इलेक्ट्रॉन किरणपुंज (λ=0 2A°) को वस्तु पर फोकसित किया जाता है और वस्तु के प्रतिबिंब को एक फोटो की प्लेट पर उतार लिया जाता है। उपयुक्त रूप से समंजित विद्युतीय एवं चुम्बकीय क्षेत्रों का इलेक्ट्रॉन किरण-पुंज पर प्रभाव वैसा ही होता है जैसा लेन्सों का प्रकाश के ऊपर होता है। चित्र 9.25 में एक इलेक्ट्रॉन सूक्ष्मदर्शी तथा एक प्रकाशिक सूक्ष्मदर्शी के रेखाचित्र दिखाये गये है। इलेक्ट्रॉन सूक्ष्मदर्शियों की आवर्धन क्षमता ~ 100,000 होती है। भौतिकी में इनका उपयोग क्रिस्टलों की संरचना के अध्ययन के लिए तथा जीव विज्ञान में इनका उपयोग रोगाणुओं एवं विषाणुओं के अध्ययन के लिए किया जाता है।

चित्र 9.25 प्रकाशिक एवं इलेक्ट्रॉन सूक्ष्मदर्शियों में प्रतिबिम्ब का बनना a) I=अंतिम प्रतिबिम्ब, PL=प्रक्षेपी लेन्स OL=अभिदृश्यक लेन्स
O=वस्तु, LL=संग्राही लेन्स, LS=प्रकाश का स्रोत
b) PS=प्रक्षेपी कुंडली, OL=अभिदृश्यक कुंडली
CC=संग्राही कुंडली, ES=इलेक्ट्रॉन का स्रोत

प्रश्न-अभ्यास

9.1 किसी कैथोड किरण प्रक्षेपी चित्र (9.2a) के इलेक्ट्रोडों के बीच विभवान्तर 500 वोल्ट है। (i) इलेक्ट्रॉनों द्वारा अर्जित ऊर्जा की (ii) इलेक्ट्रॉनों के वेग की तथा (iii) इलेक्ट्रॉनों के संवेग की गणना कीजिये। ($\frac{4}{3} \times 10^7$मी से$^{-1}$)

9.2 प्रश्न 9.1 का इलेक्ट्रॉन किरणपुंज एक समांतर पट्टिका वाले संधारित्र (चित्र 9.2b) के भीतर

से गुजरता है। पट्टिकाओं के बीच विद्युतीय क्षेत्र की तीव्रता 2000 वोल्ट प्रति मीटर है। प्लेटों के बीच की दूरी 5 सेमी और उनकी लम्बाई 10 सेमी है। किरणपुंज के विचलन की गणना कीजिये। (10^{-3} रेडियन)

9.3 परमाणुओं के द्रव्यमान का अधिकांश भाग धन आवेश मे होता है। हाइड्रोजन परमाणु के लिए परमाणु भार का कितना अंश ऋण आवेश में होता है?

$$\left(\frac{1}{1833}\right)$$

9.4 α—कण एवं सोने के नाभिक के बीच सम्मुख टक्कर में समीप पहुँचने की न्यूनतम दूरी 4×10^{-14} मी है। आल्फाकण की ऊर्जा की गणना कीजिये। (5.7 MeV)

9.5 मान लीजिये कि किसी परमाणु का धन आवेश, नाभिक में संकेन्द्रित होने के स्थान पर, परमाणु के पूरे आयतन पर समान रुप से बटा हुआ है। यह टाम्सन द्वारा प्रस्तुत परमाणु का मॉडल है। टाम्सन एव रदरफोर्ड के मॉडलों के लिए α—कणो के प्रकीर्णन का गुणात्मक विवेचन कीजिये।

9.6 चिरसम्मत विद्युच्चुम्बकीय सिद्धान्त द्वारा हाइड्रोजन परमाणु के लिए कुछ प्रागुक्तियाँ होती हैं। प्रागुक्तियों को लिखिये और प्रेक्षण से उनकी तुलना कीजिये।

9.7 हाइड्रोजन परमाणु की स्थायी अवस्था मे इसके अर्धव्यास की गणना कीजिये। n = 1 कक्षा मे इलेक्ट्रॉन का वेग कितना होता है?

($a_0 = 0.53$A°, $v_0 = 2.2 \times 10^7$ मीसे$^{-1}$)

9.8 समीकरण (9.10) के नियतांक $R = \frac{2\pi^2 k^2 m e^4}{h^3}$ की गणना कीजिये। इस नियतांक की विमा क्या है? (3.289×10^{15} हर्ट्स)

9.9 सिद्ध कीजिये कि हाइड्रोजन परमाणु का आयनन विभव 13.6 वोल्ट है।

9.10 लीथियम परमाणु के लिए आयनन विभव की गणना कीजिये (चित्र 9.12 देखिये)।
(संकेत n=2 से n=∞ तक संचरण तथा Z=1)

(4.4 eV)

9.11 बेरीलियम, कार्बन एवं आक्सीजन परमाणुओं की इलेक्ट्रॉनीय संरचना लिखिए।

9.12 N कोश के इलेक्ट्रॉन के लिए सभी संभव क्वांटम अवस्थाओं को लिखिये।

9.13 सोने के परमाणुओं के लिए Kα, X—किरण के तरंगदैर्घ्य की गणना कीजिये (संकेत: समीकरण 9.10 देखिये) ($\nu = 1.522 \times 10^{19}$ हर्ट्स)

9.14 किसी क्रिस्टल से एकवर्णी X किरणों के परावर्तन का कोण 15° है। यदि क्रिस्टल के परमाणुओं का अन्तराल 2.5A° है तो X-किरणों के तरंगदैर्घ्य की गणना कीजिये। (1.294 A°)

9.15 एक X-किरण नलिका पर विभवान्तर 50,000 वोल्ट है। इससे निकले संतत X-किरणों की अधिकतम आवृत्ति और तरंगदैर्घ्य की गणना कीजिये। ($\nu = 12.1 \times 10^{18}$ हर्ट्स) (0.247A°)

9.16 एक वर्णी ($\lambda = 1$A°) X-किरणों की तीव्रता सोने की पन्नी (Z=79) के 3 मिमी के भीतर से

गुजरने पर प्रारंभिक तीव्रता 1/3 हो जाती है X-किरणों के अवशोषण गुणांक की गणना कीजिये। अवशोषण गुणांक की विमा क्या होती है ?

(3.7 सेमी$^{-1}$)

9.17 तांबे की $K\alpha$ रेखा का तरंगदैर्ध्य 1.54 A° है। तांबे के K कोश के इलेक्ट्रानों के लिए आयनन विभव की गणना कीजिये। (8.1×10^3 वोल्ट) (ऊर्जा $= 12.9 \times 10^{-16}$ जूल)

9.18 उस फोटॉन की ऊर्जा की गणना कीजिये (i) जिसकी आवृत्ति 1000 किलो हर्ट्स (रेडियो तरंग) है (ii) जिसका तरंग दैर्घ्य 6000A° (पीला प्रकाश) है तथा (iii) जिसका तरंगदैर्ध्य 0.6 A° (X-किरण) है।

(i) 6.6×10^{-28} जूल (ii) 3.3×10^{-19} जूल (iii) 3.3×10^{-15} जूल)

9.19 उस फोटान की आवृत्ति क्या है जिसकी ऊर्जा 75eV है ?

(18×10^{16} हर्त्स)

9.20 उन फोटानों की देहली आवृत्ति की गणना कीजिये जो (i) सीजियम तथा (ii) निकेल से प्रकाशिक इलेक्ट्रॉनों का उत्सर्जन करा सकते हैं।

(i) $\nu_{ce} = 4.3 \times 10^{14}$ हर्ट्स (ii) $\nu_{ni} = 1.4 \times 10^{15}$ हर्ट्स)

9.21 यदि प्रकाशिक इलेक्ट्रॉन का वेग 10^6 मी से$^{-1}$ हो तो पोटैशियम धातु पर पड़ने वाले विकिरण की आवृत्ति क्या होगी ? (1.2×10^{15} हर्त्स)

9.22 किसी फोटान का तरंगदैर्ध्य 1.4A° है। एक इलेक्ट्रॉन से इसकी टक्कर होती है। टक्कर के बाद इसका तरंगदैर्ध्य 2.0A° है। प्रकीर्णित इलेक्ट्रॉन की ऊर्जा की गणना कीजिये।

(4.3×10^{-16} जूल)

9.23 यदि किसी इलेक्ट्रॉन तथा किसी प्रोट्रॉन का वेग 10^5 मी से$^{-1}$ हो तो उनके लिए डी ब्रागली तरंग दैर्ध्य की गणना कीजिये। ($\lambda_e = 7.25 \times 10^{-7}$मी, $\lambda p = 3.9 \times 10^{-10}$ मी)

9.24 यदि किसी इलेक्ट्रॉन का तरंगदैर्ध्य 2 A° हो तो उसका संवेग क्या होगा ?

(3.3×10^{-24} किग्रा मी से$^{-1}$)

9.25 किसी इलेक्ट्रॉन सूक्ष्मदर्शी में इलेक्ट्रॉनों का वेग 10^5 मी से$^{-1}$ है। यदि इलेक्ट्रॉनों के स्थान पर इसी वेग के प्रोटानों का उपयोग किया जाय तो ऐसे प्रोटान सूक्ष्मदर्शी से इलेक्ट्रॉन सूक्ष्मदर्शी की अपेक्षा अतिरिक्त लाभ क्या होगा ? विवेचन कीजिये।

आपेक्षिक सिद्धान्त में आकाश, काल एवं द्रव्यमान की धारणाएँ

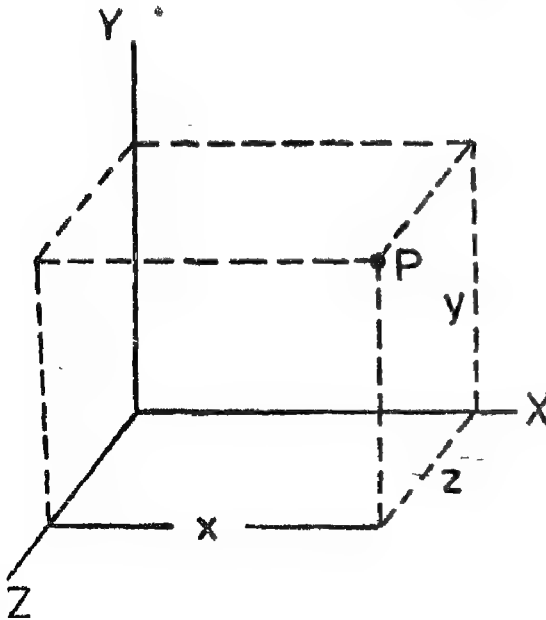
(*Concepts of Space, Time and Mass in Relativity*)

ग्रहीय गति जैसी भौतिकी घटनाओं के प्रेक्षण तथा अध्ययन से व्यापक सिद्धान्त और उन घटनाओं को नियंत्रण करने नियमों का अनुमान प्राप्त किया जाता जाता है। घटनाओं के लिए ऊर्जा, संवेग आदि जैसी नापी जा सकने वाली राशियों लम्बाई, काल, तथा द्रव्यमान की तीन मौलिक राशियों से प्राप्त की जाती हैं। प्रकृति के नियमों को प्राप्त करने के लिए बिना किसी शंका के कुछ मान्यताओं का उपयोग किया है जो अत्यन्त सामान्य दृष्टिकोण से तर्क संगत प्रतीत हैं। इन्हें आकाश, काल एवं द्रव्यमान के विषय में निर्विवाद मान्यताएँ कहा जाता है। उदाहरण के लिए न्यूटन की यांत्रिकी में यह माना जाता है कि आकाश का अन्तराल, काल का अंतराल और किसी पिंड का द्रव्यमान ऐसे प्रेक्षकों पर निर्भर नहीं करता जिनमें परस्पर एक समान गति हो रही हो। दूसरे शब्दों में यदि एकसमान गति से चलती हुई रेलगाड़ी में कोई घड़ी हो तो रेलगाड़ी में चलते हुए किसी प्रेक्षक द्वारा नापे गये और भूमि पर स्थिर किसी अन्य प्रेक्षक द्वारा नापे गये घड़ी का द्रव्यमान, इसका व्यास तथा इसकी टिक-टिक के कालान्तराल एक ही होंगे। गैलीलियो एवं न्यूटन द्वारा कल्पित आकाश, काल एवं द्रव्यमान की ये धारणाएँ यांत्रिकी तथा खगोल के प्रेक्षणों की संतोषजनक व्याख्या करने मे सफल रहीं। परन्तु जब इन्हीं मान्यताओं को प्रकाश के वेग के ऊपर लगाया गया तो इनसे सामंजस्यपूर्ण फल नहीं प्राप्त हुए। आइन्स्टाइन को आकाश, काल तथा द्रव्यमान की इन धारणाओं के पुनः परीक्षण और उन्हें किंचित परिवर्तित करने की आवश्यकता हुई जिससे सभी स्थितियों में इनसे सुसंगत फल मिल सकें। इस अध्याय में हम गैलीलियों के समय से अब तक की आकाश, काल एवं द्रव्यमान की धारणाओं में परिवर्तन के क्रम की चर्चा करेंगे और भौतिकी प्रेक्षणों तथा नियमों पर उनके प्रभाव का विवेचन करेंगे।

10.1 प्रेक्षक, घटना तथा निर्देशतंत्र की परिभाषा (Definition of Observer Event and Frame of Reference)

इस अध्याय के मुख्य विषय को प्रारम्भ करने के पहले कुछ पदों को समझाने की आवश्यकता है जो बार-बार इस विषय में प्रयुक्त होते हैं। घटना कोई सरल अथवा जटिल होनी है जो किसी स्थान पर किसी काल में होती है। उदाहरण के लिए घड़ी की टिक-टिक घटनाओं का एक क्रम है। आकाश में बिजली का चमकना, सड़क पर दो मोटरगाड़ियों की टक्कर, किसी पेड़ से फल का गिरना, आदि घटनाओं के कुछ अन्य उदाहरण है जो आकाश में घटित होते हैं। प्रेक्षक का आशय वह मनुष्य अथवा नापने का उसका वह उपकरण है जिससे वह उस घटना को देखता है अथवा

नापता है। वह पैमाना, घड़ी, दूरबीन, आदि जैसे सभी उपकरणों से लैस है जो किसी घटना के विषय मे माप करने के लिए आवश्यक है, वह प्रेक्षणो से निष्कर्ष निकालता है।

किसी पेड़ से फल का गिरना उस प्रेक्षक द्वारा किया हुआ गुणात्मक प्रेक्षण है जिसने उस फल को गिरते देखा। यदि इन बातो की ठीक-ठीक जानकारी प्राप्त करनी हो कि गिरने के पहले फल कहाँ था, किस क्षण पर उसने गिरना प्रारम्भ किया, किस क्षण पर वह पृथ्वी पर पहुँचा, आदि तो प्रेक्षक को मात्रात्मक नाप करनी होगी जिसके लिए उसे एक निर्देशतंत्र प्रतिष्ठित करना होगा। स्थापित निर्देश तंत्र में ही प्रेक्षक भी होता है। प्रेक्षक यह समझता है कि उसका निर्देश तंत्र गतिहीन है, अर्थात् वह स्थिरता की अवस्था में है तथा अन्य निर्देशतंत्र उसकी अपेक्षा-गतिशील है। उस निर्देशतंत्र को जड़त्वीय निर्देशतंत्र कहते हैं जिससे पिंड न्यूटन के जड़त्वीय नियम का तथा न्यूटनीय यांत्रिकी के अन्य नियमों का पालन करते हैं।

चित्र 10.1 किसी कार्तीय निर्देश तंत्र में किसी बिन्दु के निर्देशांक।

कोई अन्य निर्देश तंत्र थी जिसकी गति जड़त्वीय निर्देशतंत्र की अपेक्षा ऋजुरेखीय और एक समान होती है, जड़त्वीय निर्देशतंत्र कहलाता है। इसको अकसर जड़त्वीय तंत्र कहा जाता है और प्रेक्षक जड़त्वीय प्रेक्षक कहलाता है।

सामान्यतः सुविधा के लिए हम कार्तीय निर्देशांक तंत्र का उपयोग करते हैं जिसके मूलबिन्दु पर प्रेक्षक होता है। आकाश में किसी बिन्दु P के निर्देशांकों को चित्र (10.1) में दिखाया गया है। यदि बिन्दु P गतिशील हो तो t पर (x,y,z) की निर्भरता से इसकी गति की ठीक-ठीक अभिव्यक्ति होती है।

10.2 आपेक्षिक गति का नियम (Principle of Relative Motion)

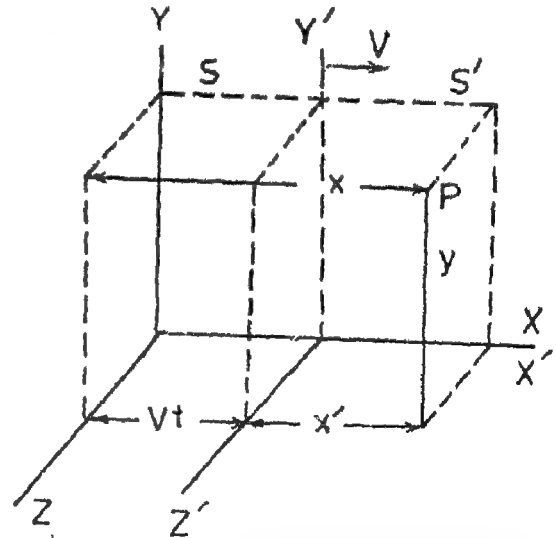
इस अनुच्छेद का वर्ण्य विषय अधिकांश में तार्किक है और निष्कर्ष उन तथ्यों के व्यापकीकरण पर आधारित है जिन्हें निदर्शी दृष्टान्तों से प्राप्त किया जाता है। हम निम्नलिखित दृष्टान्तों पर विचार करें: (i) दो रेलगाडियाँ किसी प्लेटफार्म के सापेक्ष दो पास-पास की पटरियों पर खड़ी हैं। एक गाड़ी पर प्रेक्षक है और और दूसरी गाड़ी प्लेटफार्म से चलना प्रारम्भ करती है। प्रेक्षक दूसरी गाड़ी को देखता है। बिना किसी अन्य प्रेक्षण के क्या प्रेक्षक इसका उत्तर दे सकता है कि उसकी गाड़ी चल रही है या नहीं? तथा (ii) प्रेक्षक जड़त्वीय रेलगाड़ी में है। प्रेक्षक पास के दृश्य को देखता है और वह पाता है कि पेड़ और तार के खम्बे उसकी अपेक्षा चल रहे हैं। क्या प्रेक्षक बतला सकता है कि उसकी गाड़ी चल रही है या नहीं (i) तथा (ii) के उदाहरणों में प्रेक्षक को यह निश्चय नहीं हैं कि उसकी गाड़ी चल रही है या नही। उदाहरण (i) में यदि प्रेक्षक प्लेटफार्म की ओर देखे तो उसे पता चलेगा कि स्टेशन के सापेक्ष वह स्थिर है और तब निश्चयपूर्वक उस का निष्कर्ष होगा कि उसकी गाड़ी चल नही रही है। उदाहरण (ii) में प्रेक्षक को जब तक यह नहीं बताया जायगा कि तार के खम्बे और पेड़ रेल की पटरी के सापेक्ष स्थिर हैं उसे कुछ निश्चित पता नहीं चलेगा।

इस तरह ऊपर के उदाहरणों से हम इस निष्कर्ष पर पहुँचते है कि स्थिरता तथा एक समान ऋजुरेखीय गति (अर्थात् जड़त्वीय अवस्था) सापेक्ष पद है और इनकी परिभाषा जड़त्वीय तंत्र के बाहर की वस्तुओं के सापेक्ष ही हो सकती है।

इस परिस्थिति का और अधिक परीक्षण करने के लिए हम कुछ अन्य प्रयोग कर सकते हैं जैसे चाय के बरतन से प्याले में चाय ढालना, ऊपर की ओर किसी गेंद को फेंकना और गिरते समय इसे पकड़ लेना, सरल लोलक की गति और किसी बन्दूक से चलायी गोली की गति तथा इसके पथ का अध्ययन, आदि। पहले दो प्रयोग हम सभी के साधारण अनुभव के हैं। स्थिर गाड़ी और एकसमान ऋजुरेखीय गति से चलने वाली गाड़ी में चाय ढालना अथवा किसी गेंद को ऊपर फेंकना और गिरते समय इसे पकड़ लेना बहुत सहज है। गाड़ी के भीतर किये गये अन्य प्रयोगों से भी ऐसे परिणाम नहीं प्राप्त होते जिन से स्थिरता और एक समान ऋजुरेखीय गति के बीच अंतर स्थापित किया जा सके। ऐसे प्रयोगों से यह स्पष्ट होता है कि सभी जड़त्वीय निर्देशांक गति के नियमों का वर्णन करने में तुल्याकी हैं अर्थात् सभी जड़त्वीय प्रेक्षकों के लिए गति का नियंत्रण करने वाले नियम एक ही हैं। उपर्युक्त कथन को आपेक्षिक गति का सिद्धान्त अथवा न्यूटन का आपेक्षिक सिद्धान्त कहते हैं। भौतिकी तर्क पर आधारित इस सिद्धान्त के गणितीय विवेचन को आगे के दो अनुच्छेदों में दिया गया है।

10.3 गैलिलीय रुपान्तरण (Galilean Transformation)

अनुच्छेद 10.1 में हमने बताया कि किस तरह कोई प्रेक्षक किसी बिन्दु की स्थिति एवं काल निर्देशांकों को किसी निर्देशतंत्र में क्रमशः (x,y,z) तथा t द्वारा लिखता है। उसी बिन्दु के निर्देशांक किसी अन्य प्रेक्षक के द्वारा लिखे जा सकते हैं जो पहले प्रेक्षक के सपेक्ष गतिमान है। यदि हम किसी पिंड के मुक्त पतन को आकाश में देखें तो उस प्रेक्षक के लिए जो पृथ्वी पर स्थिर है इसका गमन नीचे की ओर ऊर्ध्वाधर दिशा में प्रतीत होगा जब कि उस प्रेक्षक के लिए जो एक रेलगाड़ी में एक समान ऋजुरेखीय गति से चल रहा है इसका पथ परवलयिक होगा। यह अध्ययन महत्वपूर्ण है कि दो प्रेक्षक जिनमें सापेक्ष गति है आकाश में होने वाली घटनाओं को किस प्रकार अंकित करते हैं, इसके अतिरिक्त यह जाना भी प्रासंगिक है कि घटनाओं को परिचालित करने वाले नियमों के लिए वे किस निष्कर्ष पर पहुँचते हैं। यह स्पष्ट है कि इसके लिए किसी निर्देश पद्धति का होना आवश्यक है और हम नीचे ऐसे दो तंत्रों का वर्णन करते हैं जिनका उपयोग आपेक्षिकता सिद्धान्तों में प्रायः किया जाता है।

हम दो जड़त्वीय प्रेक्षकों O तथा O′ पर विचार करें जो क्रमशः दो जड़त्वीय निर्देश तंत्रों S एवं S′ के मूलविन्दुओं पर स्थित हैं। चित्र (10.2) में जड़त्वीय निर्देशतंत्रों एवं प्रेक्षकों का आरेखीय चित्र दिया गया है। S तथा S′ अपने उभयनिष्ठ X—X′ अक्ष पर v

10.2 S तथा S′ दो निर्देशतंत्र जिनके बीच एक समान आपेक्षिक वेग v है।

के तुल्य एक समान सापेक्ष गति से चल रहे हैं। S′ की गति S की दाहिनी ओर है। जड़त्वीय प्रेक्षकों के

पास मीटर के पैमाने हैं जिनकी तुलना करके जाँच कर ली गयी है। उनकी घड़ियों को भी अंशांकित तथा तुल्यतालिक कर लिया गया है। चिह्नित निर्देशांकों का संबंध निर्देशतंत्र से है तथा अचिह्नित निर्देशांकों का संबंध S निर्देशतंत्र से है। जब दोनों प्रेक्षक मिलते हैं तब हम मान लेते है कि $x=x'=o$ एवं $t=t'=o$ हैं। कुछ काल के पश्चात् प्रेक्षक 0 और 0′ किसी बिन्दु के निर्देशांक आकाश में क्रमशः (x, y, z) तथा t एवं (x,′ y,′ z′) तथा t′ निर्धारित करते हैं। ऐसी नापों के बड़े समूह से प्रत्येक प्रेक्षक के लिए P की गति प्राप्त होती है। स्वभावतः यह जानना महत्वपूर्ण कि (x, y, z) तथा (x′, y′, z′) और t एवं t′ में परस्पर संबंध किस प्रकार है। चित्र (10.2) से हमें मिलता है कि $x'=x-vt$ तथा $y'=y$ तथा $z'=z$ इन समीकरणों को गैलिलीय रूपान्तरण कहते हैं। ये समीकरण हमें बताते हैं कि आकाश में किसी बिन्दु के निर्देशांकों को एक जड़त्वीय निर्देशतंत्र से दूसरे जड़त्वीय निर्देशतंत्र कैसे स्थान्तरित किया जाता है।

1905 के पहले भौतिक विज्ञानियों का विश्वास था कि काल निरपेक्ष है अर्थात् कालान्तराल जड़त्वीय निर्देशतंत्रों पर निर्भर नहीं करते। इस विश्वास से न्यूटनीय यांत्रिकी में प्रायोगिक फलों और प्रागुक्तियों में कोई असंगति नहीं होती थी। अतः स्थान्तरण के समुच्चय को पूरा करने के लिए उपर्युक्त समीकरणों में समीकरण $t=t'$ जोड़ दिया जाता है।

इन स्थान्तरणों के समुच्चय में यह सूचना निहित है कि आकाश एवं काल के अन्तराल सभी जड़त्वीय निर्देश तंत्रों में एक ही होते है। इस कथन से आकाश एवं काल की निरपेक्ष परिभाषा होती है। इस प्रकार न्यूटन की यान्त्रिकी में आकाश तथा काल दोनों को निरपेक्ष माना जाता है। न्यूटन की यांत्रिकी में यह माना जाता है कि आकाश का अस्तित्व वस्तुओं के साथ सम्बन्ध बिना भी है। आकाश निरेपक्ष और स्थिर है। सभी वस्तुएँ जैसे तारे आदि इस आकाश में गमन करते हैं। आकाश मे जड़ा हुआ निर्देशतंत्र स्थिर जड़त्वीय निर्देशतंत्र है जिसके सापेक्ष में सभी आपेक्षिक गतियों को नापने की आवश्यकता है।

10.4 न्यूटन का आपेक्षिकता सिद्धान्त (Newtonian Relativity Principle)

गैलिलीय स्थान्तरण के समीकरणों का पूरा समुच्चय है :

$$\left.\begin{array}{l} x'=x-vt; \\ y'=y,\ z'=z,\ t'=t \end{array}\right\} \qquad (10\cdot1)$$

आकाश में पिंड P (चित्र 10·2) काल के साथ गमन करता है। (u'_x+, u'_y+; $u_z'+$) तथा (u_x, u_y, u_z) के समुच्चय क्रमशः 0′ तथा 0 प्रेक्षकों के लिए वेग के घटकों को निरूपित करते है। इन समुच्चयों के बीच सम्बन्ध समीकरण 10.1 के अवकलन से प्राप्त होता है। ये सम्बन्ध हैं

$$\left.\begin{array}{l} u'_x=u_x-v \\ u'_y=u_y;\ u'_z=u_z \end{array}\right\} \qquad (10\cdot2)$$

अर्थात् $u_x'=u_x-v$

यांत्रिकी में यह वेग-योग-प्रमेय है जो यह निश्चित करता है कि वेगों को कैसे जोड़ना चाहिए। इसी प्रकार S′ एवं S¹ जड़त्वीय निर्देशतंत्रों में किसी पिंड के त्वरण के घटकों के सम्बन्ध हैं :

$$\left.\begin{array}{l} a_x'=a_x;\ a_y'=a_y;\ a_z'=a_z \\ \text{अथवा } a'=a \end{array}\right\} \qquad (10\cdot3)$$

उपर्युक्त समीकरण हमें बताते हैं कि किसी पिंड का त्वरण सभी जड़त्वीय निर्देशतंत्रों के लिए एक ही होता है न कि वेग और त्वरण एक निरपेक्ष राशि है। निरपेक्ष राशियों को अचर राशियाँ भी कहा जाता है, वे गैलिलीय रूपान्तरण में अचर रहती हैं।

न्यूटन की यांत्रिकी में द्रव्यमान एक महत्वपूर्ण धारणा है और वह सभी भौतिक पिंडों का गुण है। अनुभव से यह मानना तर्क संगत प्रतीत होता था कि द्रव्यमान एक निरपेक्ष राशि है और जड़त्वीय निर्देशतंत्रों पर निर्भर नहीं करता दूसरे शब्दों में गैलिलीय स्थान्तरण के लिए द्रव्यमान एक अचर राशि है। न्यूटन के दूसरे नियम से बल की परिभाषा होती है। द्रव्यमान तथा त्वरण की निश्चरता से बल भी अचर होता है।

इस प्रकार हमने सिद्ध कर दिया है कि न्यूटन के नियम जिनका यांत्रिकी का ढाँचा आधारित है, सभी जड़त्वीय निर्देश तंत्रों के लिए एक ही हैं। यह आपेक्षिक गति के सिद्धान्त की केवल पुनरुक्ति है।

इसी प्रकार ऊर्जा और संवेग के संरक्षण के सिद्धान्त सभी जड़त्वीय निर्देश तंत्रों के लिए मान्य हैं। अतः यह कहा जा सकता है कि न्यूटन की आपेक्षिकता सिद्धान्त गैलिलीय स्थानान्तरण के लिए निश्चरों का वर्णन है।

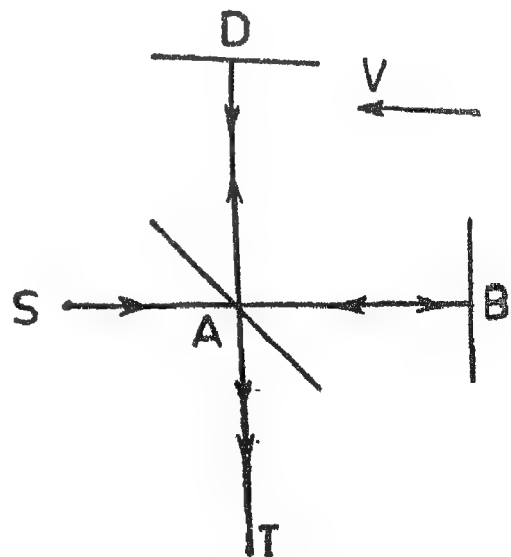
10.5 प्रकाश की प्रकृति (Nature of Light)

यांत्रिकी की मान्यता का सत्यापन उन पिंडों की गति के लिए है जिनका वेग प्रकाश के वेग की अपेक्षा बहुत कम है। यह महत्वपूर्ण है कि यांत्रिकी की प्रामाणिकता को प्रकाश के वेग जैसे उच्च वेगों के लिए बढ़ाया जाय। प्रकाश का विशिष्ट लक्षण उसका अत्युच्च वेग (3×10^8 मी/से) है स्थूल भौतिक पिंड बहुत कम वेग से चलते हैं, सूर्य के गिर्द पृथ्वी की चाल 30 किलो मी/से है। प्रकाश एवं ध्वनि में कुछ मिलती जुलती विशेषताएँ देखी जाती हैं। दोनों में तरंग के गुण हैं। ध्वनि के संचरण के लिए भौतिक माध्यम की आवश्यकता होती है और यह निर्वात में नहीं चल सकती इन तथ्यों के आधार पर उन्नीसवीं शताब्दी में वैज्ञानिक इस निष्कर्ष पर पहुँचे की प्रकाश के संचरण के लिए भी एक भौतिक माध्यम की आवश्यकता होनी चाहिए, इस भौतिक माध्यम को 'ईथर की संज्ञा दी गयी। चूंकि दूर स्थित तारों से भी हम तक प्रकाश आ सकता है, वैज्ञानिकों के लिए यह कल्पना कर लेना स्वाभाविक था कि ईथर विश्व के पूरे आकाश में फैली हुई है। ईथर माध्यम में कुछ द्रष्टव्य गुण होने चाहिये प्रकाश के संचरण की विशिष्टताओं को ईथर माध्यम के ऊपर निर्भर करना चाहिये।

यान्त्रिकी के वेग-योग-प्रमेय (समी० 10·2) के अनुसार प्रकाश का वेग सभी जड़त्वीय निर्देशतंत्रों में, जिनमें आपेक्षिक वेग v है, एक ही नहीं होना चाहिए, अर्थात् गैलिलीय रूपान्तरण का प्रकाश का वेग परिवर्ती राशि है। उन्नीसवीं शताब्दी के अन्त में वैज्ञानिक विचारधारा यह थी कि यदि ईथर की अपेक्षा पृथ्वी चलती है तो प्रकाश के वेग की दिशा के ऊपर ठीक उसी प्रकार निर्भर करना चाहिए जिस प्रकार नदी में नाव की चाल दिशा के ऊपर निर्भर करती है। ईथर की अपेक्षा पृथ्वी की गति प्रकाश के वेग c की तुलना कम है कि दिशा के ऊपर प्रकाश के वेग की निर्भरता बहुत कम होनी चाहिए।

ईथर की अपेक्षा पृथ्वी की गति के कारण प्रकाश के वेग में परिवर्तन की जाँच का सर्वप्रथम प्रयत्न माइकेल्सन और मोर्ले ने (1887) किया।

10·6 माइकेल्सन और मोर्ले का प्रयोग (Michelson Morley Experimvnt)

इस अनुसंधान का उद्देश्य पृथ्वी के पृष्ठ पर विभिन्न दिशाओं में प्रकाश के वेग की नाप ईथर की अपेक्षा पृथ्वी की गति की जाँच करना था। इसके फल इतने आश्चर्यजनक एवं अप्रत्याशित थे कि कई दशाब्दियों तक विभिन्न टोलियों ने उन्नत परिशुद्धता के साथ इस प्रयोग को दोहराया। माइकेल्सन के व्यतिकरणमापी के व्यवस्था चित्र को चित्र (10·3) में

चित्र 10.3 माइकेल्सन का व्यतिकरणमापी।

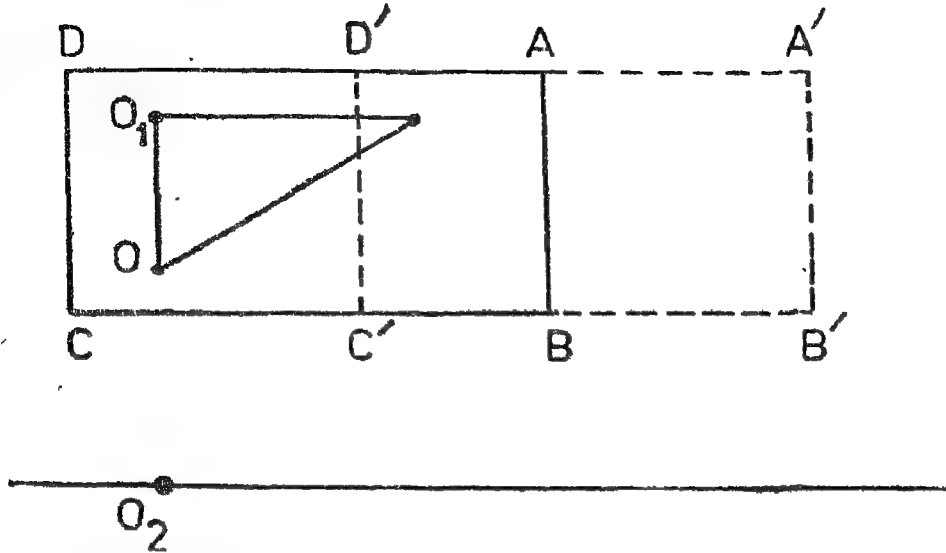
दिखाया गया है। S स्रोत से λ तरंगदैर्ध्य का एकवर्णी प्रकाश का किरणपुंज अर्धरंजित प्रकाशीय काँच की पट्टिका A पर गिरता है। काँच की पट्टिका किरणपुंज के अक्ष के साथ 45° का कोण बनाती हैं। प्रकाश का एक अंश (किरणपुंज-1) A से परावर्तित होकर दर्पण D की ओर जाता है जो A से L_2 दूरी पर है। प्रकाश का दूसरा अंश (किरणपुंज-2) B दर्पण की ओर जाता है। AB दूरी L_1 है। पृथकक्कृत किरणपुंज B तथा D दर्पणों से परावर्तित होकर दूरबीन T के भीतर जाते हैं। चित्र में ईथर की अपेक्षा पृथ्वी की चाल v को भी दिखाया गया है। दूरबीन के दृष्टि-क्षेत्र में किसी बिन्दु का दीप्त अथवा अदीप्त होना इस बात पर निर्भर करेगा कि पथों (ADAT तथा AB-AT) का अन्तर तरंगदैर्ध्य का पूर्णांकगुणज है अथवा अर्धपूर्णांक गुणज है E इस प्रकार दूरबीन के दृष्टिक्षेत्र में एकान्तरित दीप्त एवं अदीप्त फ्रिंजों का नमूना दिखायी पड़ेगा।

किरणपुंजों 1 तथा 2 से ईथर पवन की दिशा और उसके विरुद्ध गमन करने के काल और उसके अभिलंब दिशा में गमन के काल में अन्तर $\triangle t$ है। यदि पूरे उपकरण को उसके अक्ष के चारों ओर 90° के कोण से घुमाया जाय तो किरणपुंज 1 को पृथ्वी की गति की अभिलंब दिशा में गमन करना पड़ेगा और किरणपुंज 2 को पृथ्वी की गति की दिशा और उसके विरुद्ध गमन करना पड़ेगा ईथर पवन की दिशा पहले जैसी ही रहती है। किरणपुंज 1 तथा 2 के गमन काल का अंतर अब $\triangle t'$ है। अतएव व्यक्तिरणमापी को घुमाने से किरणपुंजों 1 तथा 2 के गमन काल के अंतर में ($\triangle t' - \triangle t$) परिमाण का परिवर्तन हो जाता है। चूँकि उपकरण को 90° के कोण से घुमाने के पहले और पश्चात गमन काल भिन्न-भिन्न है, अतएव दूरबीन के तार की अभिलंब दिशा में फ्रिंजों की गति होनी चाहिए। ठीक-ठीक गणना करने से यह सूचना मिली कि माइकेल्सन एवं मोर्ले के प्रयोग में चार दशांश के तुल्य फ्रिंज, सृति होनी चाहिए। माइकेल्सन का व्यतिकरणमापी इतना संवेदनशील है कि एक फ्रिंज सृति के 1/1000 वें भाग का परिवर्तन नापा जा सकता था। दिन में तथा रात्रि में प्रेक्षण लिए गये (क्योंकि पृथ्वी अपने अक्ष के चारों ओर घूमती है) और वर्ष की सभी ऋतुओं में प्रेक्षण लिए गये। परन्तु प्रत्याशित फ्रिंज-सृति दिखायी नहीं पड़ी। अंतिम निष्कर्ष यह था कि कोई फ्रिंज-सृति होती ही नहीं है। यह अप्रत्याशित परिणाम न्यूटन के आपेक्षिकता सिद्धान्त से असंगत है।

10.7 विशिष्ट आपेक्षिकता सिद्धान्त[1] (Special Theory of Relativity)

हमने माइकेल्सन और मोर्ले के प्रयोग से देखा कि c पर ईथर का कोई प्रभाव नहीं पड़ता और किसी जड़त्वीय निर्देशतंत्र में सब दिशाओं में इसका मान एक ही रहता है। न्यूटन के आपेक्षिकता सिद्धान्त के अनुसार यदि निरपेक्ष आकाश की तादात्म्यता स्थिर ईथर के साथ की जाय तो प्रकाश के वेग c को पृथ्वी के गमन की दिशा पर निर्भर करना चाहिये। चूँकि c के लिए ऐसी कोई दिशा-निर्भरता नहीं पायी जाती, ईथर और निरपेक्ष आकाश की कल्पनाएँ अर्थहीन हो जाती हैं। इस प्रकार आइनस्टाइन के दृष्टि कोण में कोई निरपेक्ष आकाश नहीं है और सभी गतियाँ सापेक्ष हैं।

यह जानकर कि आकाश सापेक्ष है आइनस्टाइन ने यह प्रश्न किया कि क्या काल भी सापेक्ष है? काल भी सापेक्ष है इस कथन के निहितार्थ को पूर्णतया समझने के लिए हम निम्नलिखित प्रयोग पर विचार करें। हम एक गतिशील प्रयोगशाला उदाहरण के लिए रेल गाड़ी ABCD पर विचार करें जो v वेग से चल रही है (चित्र 10.4)। एक ओर O_1 परिस्थिति। कोई प्रेक्षक O_1 दूसरी ओर O पर जलाई किसी दियासलाई को देखता है। प्रेक्षक 1 को दियासलाई का प्रकाश सीधे गाड़ी के एक ओर से दूसरी ओर (अर्थात् OO_1 पथ पर) आता दिखाई देता है। परन्तु प्रेक्षक

1. व्यापक रूप से प्रेक्षकों के बीच सापेक्ष गति त्वरित अथवा अवमन्दित हो सकती है और उसका जड़त्वीय होना आवश्यक नहीं है। यदि हम जड़त्वीय पद्धतियों तक सीमित रहे तो विशिष्ट आपेक्षिकता सिद्धान्त का उपयोग करना होता है। अजड़त्वीय सतों के लिए आइनस्टाइन ने एक नया सिद्धान्त प्रतिपादित किया जिसे व्यापक आपेक्षिकता सिद्धान्त कहते हैं।

चित्र—10.4 दो जड़त्वीय प्रेक्षकों (O_1 पर 1 तथा 0 पर 2) के लिए काल विभिन्न दरों से व्यतीत होता है। प्रेक्षक 1 रेलगाड़ी ABCD पर बैठा है जो V वेग से चल रही है प्रेषक 2 प्लेठफार्म O_2 स्थान पर खड़ा है।

2 को, जो प्लेटफार्म पर O_2 पर खड़ा है, यह प्रतीत होता है कि O_1 तक पहुंचने के पहले दियासलाई के प्रकाश ने एक लंबा पथ तय किया। प्रेक्षक 2 यह देखता है कि प्रेक्षक 1 पटरी पर O_1 से O'_1 तक गमन करता है और प्रकाश उस स्थान से, जहाँ दियासलाई जलाई गयी थी, कर्ण की दिशा में चल कर O'_1 तक पहुँचती है। दोनों पथ जिन्हें प्रेषक 1 तथा 2 देखते हैं क्रमश: OO_1 एवं OO'_1 हैं। चूंकि दोनों प्रेक्षकों के लिए प्रकाश का वेग एक ही है यह निष्कर्ष निकलता कि दो घटनाओं (अर्थात दियासलाई का O पर जलाया जाना और संकेत का प्रेषक 1 तक पहुंचना) के बीच अंतराल प्रेक्षक एक (यात्री) की अपेक्षा प्रेक्षक ' (दर्शक) के लिए लंबा है। यात्री की अपेक्षा दर्शक के लिए काल शीघ्रता से व्यतीत होता है। इस प्रकार दो जड़त्वीय प्रेक्षकों के लिए समय व्यतीत होने की दर एक ही नहीं है अर्थात् काल सापेक्ष है।

आकाश और काल की इन धारणाओं का पिंडों के गतिविज्ञान पर गहरा प्रभाव पड़ता है, उदाहरण के लिए न्यूटन की यांत्रिकी की भांति द्रव्यमान एक निरपेक्ष राशि नहीं रहता। आइनसटाइन ने अपना ध्यान द्रव्यमान की धारणा की ओर विशिष्ट आपेक्षिक में इसकी भूमिका की ओर लगाया।

यह सिद्ध किया जा सकता है कि परिमित तथा अचर बल F द्वारा t काल तक कार्य करने पर m द्रव्यमान के पिंड द्वारा संप्राप्त संवेग P का मान है $P = mu = Ft$। किसी एक समान विद्युतीय अथवा गुरुत्वीय क्षेत्र की कल्पना कीजिये जो सारे आकाश में व्याप्त है। इन क्षेत्रों में कोई इलेक्ट्रॉन अथवा कोई पिंड अपने आप, काल बीतने के साथ साथ, अपरिमित सीमा तक त्वरित होता रहेगा। चूँकि F परिमित तथा अचर है, u तथा t का समानुपाती है जब तक m अचर होता है अर्थात् m का मान पिंड के वेग पर निर्भर नहीं करता। यह न्यूटन की यांत्रिकी की अन्तर्निहित मान्यता है और इसके फलस्वरूप t का मान जितना अधिकाधिक ($t \rightarrow \infty$), उतना ही u का मान असीमित रूप से बढ़ता है। परन्तु किसी भौतिक पिंड का अधिकतम वेग प्रकाश के वेग के तुल्य हो सकता है। इस प्रकार P की अधिकतम सीमा mc है जो एक परिमित एवं निश्चित मान है। इस तर्क में त्रुटि कहाँ है? जब तक u का मान t के अनुपात में है तब तक

द्रव्यमान को अचर माना जा सकता है। u की ऊपरी सीमा c है। कोई भौतिक पिंड इस सीमा को तभी पहुंचता है जब उपर्युक्त समीकरण में t का मान अनंत हो, दूसरे शब्दों मे u का मान बडा होने पर t के अनुपात में u नहीं होता। इस प्रकार जब t अनंत होता है तब u अनंत नही होता। उपर्युक्त समीकरण में जो राशि अनंत हो सकती है वह केवल m है। इस प्रकार तर्क के द्वारा हम इस निष्कर्ष पर पहुंचते हैं कि किसी पिंड का द्रव्यमान अचर नहीं होता अपितु इसके वेग का फलन होता है। इसका क्या अर्थ है? द्रव्यमान तभी परिमित होता है और इसका मान m_0 अचर होता है जब $u = 0$ हो किन्तु जब $u = c$ होता है तब इसका मान अनंत होता है। विस्तृत तर्कों के आधार पर आइनस्टाइन ने व्यंजक प्राप्त किया कि

$$m = m_0 / \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \quad (10.4)$$

जिसमें m_0 पिंड का विराम द्रव्यमान $(u = 0)$ है और m इसका द्रव्यमान तब है जब वेग u है

हम इस तथ्य से सुपरिचित है कि ऊर्जा को एक स्वरूप में परिवर्तित किया जाता है। पिंडों (स्थूल तथा सूक्ष्म दोनों की) गतिज ऊर्जा उनके वेग से संबद्ध होती है। चूंकि यह सिद्ध किया गया है कि द्रव्यमान वेग का फलन है, यह मानना क्या स्वाभाविक नहीं होगा कि द्रव्यमान भी ऊर्जा का ही एक रूप है? आइनस्टाइन ने यह सिद्ध किया कि स्वयं द्रव्यमान ऊर्जा का एक रूप है तथा द्रव्यमान और ऊर्जा में तुल्यता है। किसी पिंड के द्रव्यमान m में संचित ऊर्जा का मान है

$$E = mc^2 \quad (10.5)$$

जिसमे E ऊर्जा तथा c प्रकाश का वेग है। $E = mc^2$ से द्रव्यमान एवं ऊर्जा की तुल्यता सिद्ध हुई। इसे द्रव्यमान तथा ऊर्जा की तुल्यता का सिद्धान्त कहते है।

इस सिद्धान्त का महत्वपूर्ण उपयोग नाभिकीय तकनीक में है जिसे सामान्यतया परमाण्वीय ऊर्जा कहते हैं। नाभिकीय ऊर्जा क्या है? यह यूरेनियम जैसे नाभिकों में संचित द्रव्यमान ऊर्जा के दूसरे रूपों में स्थान्तरण के अतिरिक्त और कुछ नही है। यह स्थान्तरण एक समुदाय में होता है जिसे नाभिक भट्ठी कहते हैं।

यह अध्याय प्रकाश के वेग की सीमा तक पहुंचने वाले पर उस से कम वेग वाले भौतिक पिंडों के प्रेक्षणों पर आधारित आकाश, काल एवं द्रव्यमान की धारणाओं का पुन: परीक्षण है। न्यूटन ने आकाश एवं काल को परस्पर स्वतंत्र तथा निरपेक्ष सत्य माना था। इसके विपरीत आयनस्टाइन ने इन्हें परस्पर आश्रित एवं सापेक्ष सत्य माना। अकाश तथा काल की परवर्ती धारणाएँ जो न्यूटनीय आपेक्षिकता में परिवर्तित धारणाओं के पूर्णतया विपरीत हैं, वे मूल: आधार हैं जिन पर आपेक्षिकता के सिद्धान्त की पुन: संरचना की गयी है जो भौतिकी की सभी शाखाओं में प्रामाणिक हैं।

प्रश्न-अभ्यास

10.1 यदि किसी वस्तु की लम्बाई नापनी हो तो आप उसका अनुमान कैसे लगायेंगे जब (1) वस्तु, आपके निर्देशतन्त्र में स्थिर है और (2) आपके निर्देशतन्त्र में किसी एकसमान वेग से चल रही है।

10.2 कोई आदमी उत्तरी ध्रुव पर अपने ऊर्ध्व तथा अधर की परिभाषा करता है। इसी प्रकार दक्षिणी ध्रुव पर भी एक अन्य आदमी ऐसा ही करता है। उनकी ऊर्ध्व एवं अधर की दिशाएँ एक ही नहीं हैं। ऐसा क्यों है?

10.3 कोई आदमी पत्थर के एक टुकड़े को ऊर्ध्वाधर दिशा में ऊपर फेंकता है और वह फिर अपने मूल बिन्दु पर लौट आता है। क्या इससे सिद्ध होता है कि पृथ्वी सूर्य के चारों ओर 30 किमी/से की चाल से घूम रही है?

10.4 निम्नलिखित राशियों को गैलिलीय स्थान्तरण में परिवर्ती तथा अपरिवर्ती दो स्तम्भों की सारिणी में लिखिये :

आकाश, काल, द्रव्यमान, वेग, त्वरण, बल, संवेग, गतिज ऊर्जा, आवेश, कार्य, शक्ति, बल आघूर्ण और कोणीय संवेग ।

10-5 किसी निर्देशतन्त्र S में 3 किग्रा द्रव्यमान के पत्थर के दो गोले X-अक्ष की दिशा में क्रमशः 4 मी/से (u_1) तथा —3 मी/से (u_2) के वेगों में चलते हैं। ऊर्जा और संवेग के संरक्षण के सिद्धान्त का उपयोग करके टक्कर के पश्चात् इनके वेगों का परिकलन कीजिये । चित्र (10.2) की तरह S′ 3 मी/से के वेग से चल रहा है, सिद्ध कीजिये कि S′ में भी संक्रमण और ऊर्जा का संरक्षण होता है । (u'_1=—3मी/से, u'_2=4 मी/से)

10.6 माइकेल्सन और मोर्ले को अपना प्रयोग रात तथा दिन में और वर्ष के सभी मौसमों में दुहराने की क्या आवश्यकता थी ?

10.7 यदि किसी पदार्थ के एक ग्राम को पूर्णतः ऊष्मा में परिवर्तित कर दिया जाय तो कितने कैलारी ऊष्मा उत्पन्न होगी ।

संकेत—($E=mc^2$) (2×10^{13} कैलारी)

10.8 जब किसी पिंड का वेग प्रकाश के 0.8 भाग के बराबर हो तब इसके द्रव्यमान का परिकलन कीजिये । इस पिंड के विराम द्रव्यमान को एक ग्राम लीजिये । इस वेग पर इसका संवेग क्या होगा ?

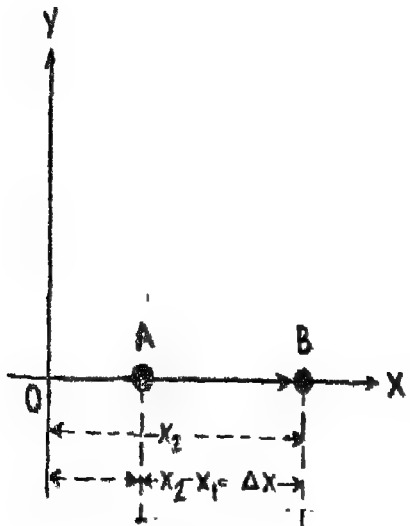
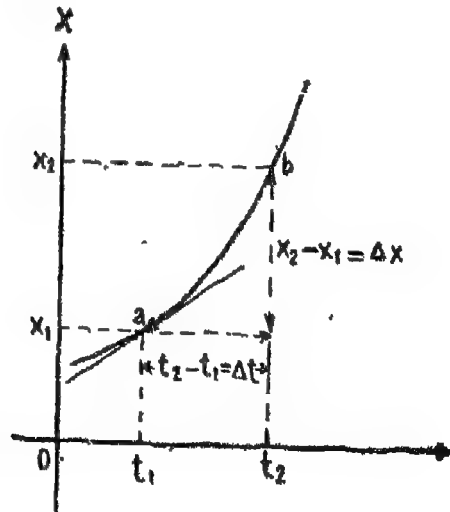
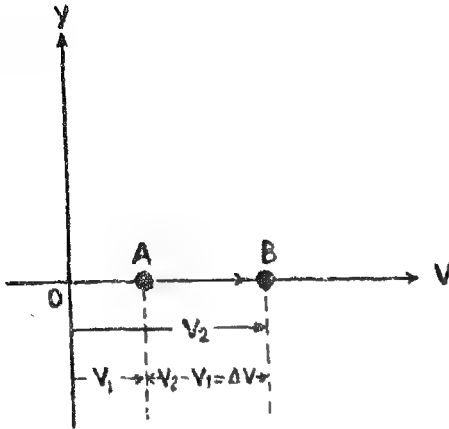
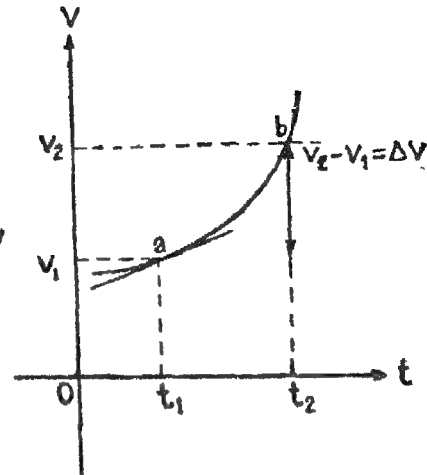
10.9 यदि पानी के 1000 किलोग्राम को 0°C से 100°C तक गर्म किया जाय तो द्रव्यमान की वृद्धि का परिकलन कीजिये ।

गणितीय टिप्पणी

अवकल गणित

पिछली कक्षाओं में ग्राफ की विधि से वेग तथा त्वरण की धारणा पर चर्चा की जा चुकी है। अब हम इस ज्ञान का उपयोग भिन्न-भिन्न परिस्थितियों में वेग तथा त्वरण ज्ञात करने के लिए करेंगे।

वेग : चित्र 1 में दिखाये कण पर विचार करें जो x—अक्ष के अनुरूप धनात्मक दिशा में गतिशील है। किसी क्षण t_1 पर कण मूलबिन्दु से x_1 दूरी पर स्थित बिन्दु A पर है। मान लीजिए कि t_2 समय पर कण बिन्दु B पर पहुंच जाता है जो मूल बिन्दु से x_2 दूरी पर है। हम देखते हैं कि कण द्वारा तय की गई दूरी समय पर निर्भर करती है। गणितीय भाषा में इसी बात को व्यक्त करने के लिए हम यह कहते हैं कि कण द्वारा तय की गई दूरी समय अंतराल का फलन है।

यदि हम उपरोक्त स्थिति के लिए कण द्वारा तय की दूरी का समय के फलन के रूप में ग्राफ खींचे तो हमें चित्र 2 में प्रदर्शित ग्राफ प्राप्त हो जाता है। ग्राफ से हम समय अन्तराल $t_2 - t_1 = \Delta t$ में कण का विस्थापन (जो सदिश है) $\vec{x}_2 - \vec{x}_1 = \Delta \vec{x}$ ज्ञात कर सकते हैं। विस्थापन $\Delta \vec{x}$ तथा समय अंतराल Δt का अनुपात बिन्दु a तथा बिन्दु b के बीच कण के औसत वेग (सदिश) को व्यक्त करता है। इस प्रकार

चित्र 1

चित्र 2

चित्र 3 चित्र 4

$$\text{औसत वेग} = \frac{\text{विस्थापन}}{\text{समय}}$$

$$v = \frac{\vec{x}_2 - \vec{x}_1}{t_2 - t_1}$$

$$v = \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t}$$

हम देखते हैं कि अनुपात $\frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t}$ रेखा ab की प्रवणता के बराबर भी है।

अब कण की ऐसी गति पर विचार करें जिसमें उसका वेग समय के साथ परिवर्तित होता हो। उपरोक्त विधि से केवल औसत वेग ही मालूम हो सकता है। कण के गति-पथ के किसी बिन्दु पर अथवा किसी क्षण पर कण के वास्तविक वेग को उसका तात्क्षणिक वेग कहते हैं। अब हम बिन्दु A पर कण का तात्क्षणिक वेग मालूम करें (चित्र 1 तथा 2)। बिन्दु A तथा बिन्दु B के बीच कण का औसत वेग उसके कुल विस्थापन $\Delta \vec{x}$ तथा कुल समय Δt से सम्बद्ध है। यदि हम बिन्दु b को बिन्दु a के समीप खिसकाते जायें तो समय अंतराल का मान कम होता चला जाएगा। जिससे प्रत्येक स्थिति के लिए औसत वेग परिकलित कर सकते हैं। जब समय अंतराल इतना कम हो जाए कि Δt का मान शून्य के निकट पहुंच जाए अर्थात् $\Delta t \rightarrow o$ तब बिन्दु a तथा बिन्दु b एक दूसरे के बहुत निकट पहुंच जायेंगे। इस स्थिति में रेखा ab बिन्दु a पर खींची स्पर्श रेखा के लगभग अनुरूप हो जाएगी। इस स्थिति में जब $\Delta t \rightarrow o$, अनुपात $\frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t}$ द्वारा परिकलित वेग तात्क्षणिक वेग को व्यक्त करता है तथा इसे $\frac{d\vec{x}}{dt}$ लिखते हैं। $\frac{d\vec{x}}{dt}$ को t के सापेक्ष $\vec{x}$ का अवकलन कहते हैं।

उपरोक्त कथन को गणितीय भाषा में निम्नलिखित रूप में व्यक्त किया जाता है।

$$v = \dim_{\Delta t \rightarrow o} \left(\frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} \right)$$

$$= \frac{d\vec{x}}{dt}$$

जब चित्र 1 में बिन्दु B बिन्दु A के निकट पहुंचता

है तो चित्र 2 में बिन्दु b बिन्दु a के निकट पहुंच जाता है। जब $\triangle t$ का मान शून्य की ओर प्रवृत्त हो अर्थात् $\triangle t \to o$ (जिसे $\triangle t$ की चरम सीमा अथवा लिमिट आफ $\triangle t$ भी कहते है), तब चाप ab की प्रवणता बिन्दु a पर खीची स्पर्श रेखा की प्रवणता के बराबर होती है। इस प्रकार x—t ग्राफ के किसी बिन्दु पर तात्क्षणिक वेग उस बिन्दु पर खीची स्पर्श रेखा की प्रवणता के बराबर होता है।

त्वरण : यदि किसी वस्तु के वेग में लगातार परिवर्तन हो रहा हो तो यह कहा जाता है कि वस्तु की गति त्वरित है। चित्र 3 में X-अक्ष की दिशा में गतिशील एक कण दिखाया गया है। सदिश $\mathbf{v}_1$ किसी बिन्दु A पर तथा सदिश $\mathbf{v}_2$ किसी अन्य बिन्दु B पर वस्तु के तात्क्षणिक वेग को प्रदर्शित करते हैं। चित्र 4 में समय के सापेक्ष तात्क्षणिक वेग $\mathbf{v}$ का ग्राफ प्रदर्शित किया गया है। बिंदु a तथा बिन्दु b क्रमशः चित्र 3 के बिन्दु A तथा B के संगत बिन्दु हैं। बिन्दु A से बिन्दु B तक पहुँचने में कण के औसत त्वरण को तात्क्षणिक वेग में हुए परिवर्तन तथा कुल समय के अनुपात के रूप में परिभाषित किया जाता है। अर्थात्

$$\text{औसत त्वरण} = \frac{\text{तात्क्षणिक वेग में हुआ परिवर्तन}}{\text{A से B तक पहुंचने में लगा कुल समय}}$$

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\triangle \mathbf{v}}{\triangle t}$$

किसी वस्तु के तात्क्षणिक त्वरण अर्थात् किसी निश्चित समय पर त्वरण की परिभाषा उसी प्रकार की जाती है जिस प्रकार तात्क्षणिक वेग की। बिन्दु A पर तात्क्षणिक त्वरण उस औसत त्वरण के बराबर होता है जब बिन्दु B को बिन्दु A के बहुत समीप लाया जाता है।

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\triangle \mathbf{v}}{\triangle t}$$

$$= \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

इसके अतिरिक्त

$$\mathbf{a} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{x}}{dt}\right) = \frac{d^2\vec{x}}{dt^2}\left[\because \mathbf{v} = \frac{d\vec{x}}{dt}\right]$$

$\frac{d^2\vec{x}}{dt^2}$ को समय t के सापेक्ष x का द्वितीय अवकलन कहते हैं। v—t ग्राफ के किसी बिन्दु पर तात्क्षणिक त्वरण उस बिन्दु पर खींची गई स्पर्श रेखा की प्रवणता के बराबर भी होता है।

उपरोक्त विवेचन से भौतिकी के अध्ययन में अवकलन की उपयोगिता स्पष्ट हो जाती है। सामान्य रूप से यदि किसी चर राशि y का मान किसी अन्य चर राशि x पर निर्भर करता है तो उसे x का फलन कहते हैं। गणितीय भाषा में इसे निम्नलिखित रूप में व्यक्त करते हैं।

$$y = f(x)$$

$f(x)$, x के फलन को व्यक्त करने की विधि है यह $f \times x$ को व्यक्त नहीं करता।

उदाहरण 1 : किसी वर्ग का क्षेत्रफल y एक अन्य चर राशि x पर निर्भर करता है जो वर्ग की भुजा की लंबाई के बराबर होता है। इस स्थिति में

$$y = x.x$$
$$= x^2$$
$$y = f(x) = x^2$$

किसी फलन के अवकलन की परिभाषा : मान लीजिए कि y, x का फलन हो अर्थात् $y = f(x)$। मान लीजिए x के मान में $\triangle x$ की बढ़ोतरी की जाती है। माना x के मान में इस परिवर्तन से y का मान $\triangle y$ बढ़ जाता है। तब फलन का नया मान

$$y + \triangle y = f(x + \triangle x)$$

होगा। अत:

$$f(x + \triangle x) - f(x) = y + \triangle y - y = \triangle y$$

अब

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{f(x + \triangle x) - f(x)}{\triangle x}$$

यदि $\triangle x$ की चरम सीमा शून्य की ओर प्रवृत्त हो अर्थात् $\triangle x \rightarrow 0$ तब

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x}$$

अत: किसी फलन y के अवकलन को $\frac{\triangle y}{\triangle x}$ की उस चरम सीमा के रूप में परिभाषित किया जाता है जबकि $\triangle x$ का मान शून्य की ओर प्रवृत्त होता है अर्थात् $\triangle x \rightarrow 0$ । प्रस्तुत पाठ्यक्रम के अध्ययन में काम आने वाले कुछ उपयोगी तथा महत्वपूर्ण अवकलन नीचे दिये जा रहे हैं । अध्यापक इनका परिकलन कक्षा में कर सकते हैं ।

(1) $\frac{dc}{dx} = 0$ (जहाँ c अचर राशि है)

(2) $\frac{d}{dx}(x) = 1$

$\left\{ \frac{dx}{dx} \right.$ को $\frac{d}{dx}(x)$ लिखते हैं$\left. \right\}$

(3) $\frac{d}{dx}(x^2) = 2.$

(4) $\frac{d}{dx}(cx^2) = c\frac{d}{dx}(x^2) = 2c.x$

(5) $\frac{d}{dx}(u+v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$

(u तथा v, x के फलन हैं)

(6) $\frac{d}{dx}(u-v) = \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx}$

(7) $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$

(8) $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$

(9) $\frac{d}{dx}\sin(\omega x + c) = \omega.\cos(\omega x + c)$

(10) $\frac{d}{dx}\cos(\omega x + c) = -\omega.\sin(\omega x + c)$

उदाहरण 2

किसी कण की ऐसी गति के उदाहरण पर विचार कीजिए जिसमें कण द्वारा तय की दूरी s तथा समय t में निम्नलिखित संबंध हो

$$s = kt^2$$

जहाँ k अचर राशि है । वेग (v) परिकलित करने के लिए हमें समय t के सापेक्ष s का अवकलन मालूम करना होगा ।

$$v = \frac{ds}{dt}$$

$$= \frac{d}{dt}(s) = \frac{d}{dt}(kt^2)$$

$$= k.\frac{d}{dt}(t^2)$$

$$= k.2t = 2kt$$

हम पहिले ही देख चुके हैं कि यदि x—अक्ष की दिशा में गतिशील कण के x—निर्देशांक को समय के फलन के रूप में व्यक्त किया जाए तो t के सापेक्ष x का अवकलन वेग को प्रकट करता है ।

परिभाषा के अनुसार

$$v = \frac{dx}{dt}$$

द्वितीय अवकलन से त्वरण **a** मिल जाता है

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt}$$

समाकलन गणित

यदि वेग **v** मालूम हो तो निर्देशांक **x** को **t** के फलन के रूप में अथवा त्वरण ज्ञात हो तो वेग **v** को t के फलन के रूप में भी व्यक्त किया जा सकता है । अब हम इस विधि पर चर्चा करेंगे । ऐसा समाकलन गणित (इन्टीग्रल केलकुलस) की विधि से किया जा सकता है जो अवकलन (डिफ्रेन्सियेसन) का गणितीय व्युत्क्रम प्रक्रम है ।

यदि समय के फलन के रूप में त्वरण **a** (t) हो तो हम जानते हैं कि

$$\frac{dv}{dt} = \mathbf{a}(t).$$

ध्यान रहे **a** (t) से केवल **a** को t फलन के रूप में व्यक्त किया जाता है तथा यह $\mathbf{a} \times t$ के बराबर नहीं

है। अवकलन के हर dt को दाहिनी ओर रखने पर

$$dv = a\ (t)\ dt$$

v को t के फलन के रूप में प्राप्त करने के लिए हम अवकल व्यंजक का समाकलन करते हैं। समाकलन प्रक्रम को व्यक्त करने के लिए अवकल व्यंजक के पहिले समाकलन का चिन्ह ∫ लगाया जाता है।

$$\int dv = \int a\ (t)\ dt$$

अथवा $v = \int a\ (t)\ dt + C$

जहाँ C एक अचर राशि है जिसे समाकल की अचर राशि कहते हैं। यदि किसी निश्चित समय t पर वेग ज्ञात हो तो अचर राशि का मान ज्ञात किया जा सकता है।

उदाहरण के लिए यदि $t=0$ पर $v=v_1$ हो तो

$$C = v_1$$

यदि हम यह मान लें कि त्वरण समय पर निर्भर नहीं करता तब उपरोक्त समाकल का मान ज्ञात करने पर, वेग v (t), t के फलन के रूप में मिल जाता है अर्थात्

$$v = a\ t + v_1$$

चूंकि $\dfrac{dx}{dt} = v(t)$

अतः $dx = v\ (t)\ dt$

$$\int dx = \int v\ (t)\ dt$$

अथवा $x = \int v\ (t)\ dt + C_1$

यदि किसी निश्चित समय t पर गतिशील कण का निर्देशांक x ज्ञात हो तो अचर राशि C_1 का मान ज्ञात किया जा सकता है।

यदि त्वरण a को x के फलन के रूप में दिया हो तो हम त्वरण के लिए व्यंजक निम्नलिखित विधि से ज्ञात कर सकते हैं।

$$a = \frac{dv}{dt}$$

$$= \frac{dv}{dt} \cdot \frac{dx}{dx}$$

जिसे निम्नलिखित रूप में लिखा जा सकता है

$$a = \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dv}{dx}$$

परन्तु $\dfrac{dx}{dt} = v$

अतः, $a = v\dfrac{dv}{dx}$

अथवा $v\ \dfrac{dv}{dx} = a(x)$

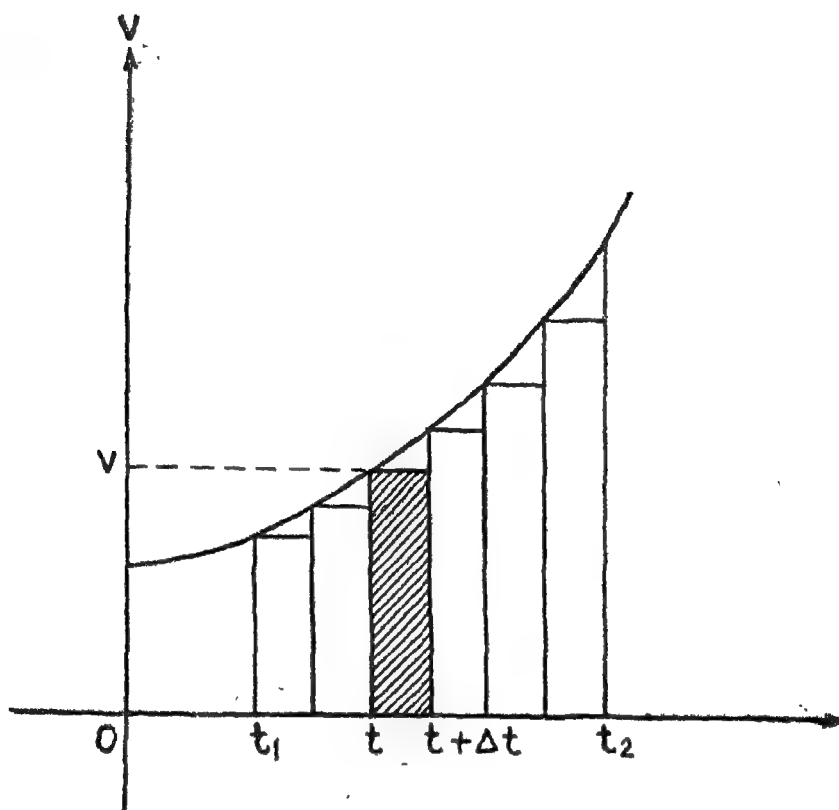
या $vdv = a(x)\ dx$

उपरोक्त का समाकलन करने पर

$$\frac{v^2}{2} = \int a(x)\ dx + C_2$$

अवकलन व्यंजकों के समाकल का मान ज्ञात करने के लिए कुछ सूत्रों की याद रखना सुविधाजनक रहता है भौतिकी की प्रस्तुत पुस्तक का अध्ययन करने में सामान्यतया काम में आने वाले कुछ सूत्र (फार्मूले) निम्नलिखित हैं।

1. $\int dx = x + C$
2. $\int adx = ax + C$ (जहाँ a, x का फलन नहीं है)
3. $\int xdx = \frac{1}{2}x^2 + C$
4. $\int \sin x\ dx = -\cos x + C$
5. $\int \cos xdx = \sin x + C$

समाकलन मूलतः योगफल है। ग्राफीय रूप में समाकलन को किसी वक्र के छोटे-छोटे भागों के क्षेत्रफलों के योगफल के रूप में लिया जा सकता है तथा समाकल संपूर्ण वक्र के क्षेत्रफल के बराबर होता है। समाकलन के भौतिक स्वरूप को समझने के लिए चित्र 5 में दिखाए वेग-समय ग्राफ पर विचार करें। माना दो ऊर्ध्वाधर रेखाओं t_1 तथा t_2 से बद्ध ग्राफ के क्षेत्रफल को छोटी-छोटी अनेक ऐसी पट्टियों में विभक्त कर दिया जाए जिसमें प्रत्येक पट्टी की चौड़ाई $\triangle t$ हो। किसी समय t के लिए ग्राफ की संगत कोटि का मान तात्क्षणिक वेग v के बराबर होता है। यदि वेग का यह मान अचर रहे तो t तथा $t + \triangle t$ के बीच के समय

चित्र 5

अंतराल में विस्थापन $\triangle x$ का मान $v \triangle t$ के बराबर होगा। परन्तु यह छायाकित पट्टी के क्षेत्रफल के बराबर है क्योंकि पट्टी की चौड़ाई $\triangle t$ तथा ऊँचाई v है। समय t_1 तथा t_2 के बीच स्थित ऐसे सभी आयतों के क्षेत्रफल का योग इस समय अंतराल में हुए कुल विस्थापन (x_2-x_1) के लगभग बराबर होगा अर्थात्

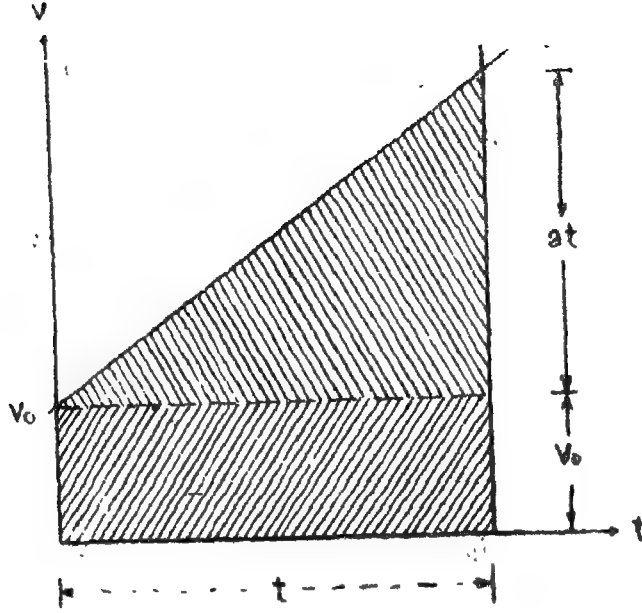
$$x_2-x_1=\Sigma v\triangle t$$

संकेत Σ सभी आयतों के क्षेत्रफल के योग को प्रदर्शित करता है। $\triangle t$ का मान जितना कम होगा उतना ही $v\triangle t$ का मान वास्तविक विस्थापन के निकट होगा। अत: जब $\triangle t$ की सीमा शून्य की ओर प्रवृत्त होती है अर्थात् $\triangle t\rightarrow 0$ तब सभी पट्टियों के क्षेत्रफलों का योगफल वक्र के वास्तविक क्षेत्रफल अर्थात् कुल वास्तविक विस्थापन x_2-x_1 के बराबर हो जाता है। क्षेत्रफलों के योगफल की इस सीमा को t_1 तथा t_2 के मध्य निश्चित समाकल कहा जाता है तथा इसे निम्नलिखित रूप में व्यक्त किया जाता है।

$$x_2-x_1=\int_{t_1}^{t_2} v dt$$

$$=\Big[vt+c\Big]_{t_1}^{t_2}$$

$$=(vt_2+c)-(vt_1+c)=vt_2-vt_1$$

जब समाकल की सीमाएं दी होती हैं तो समाकलन की अचर राशि हट जाती है। यहाँ यह मान लिया गया है कि v, t का फलन नहीं है।

चित्र 6

उपरोक्त चर्चा से यह स्पष्ट हो जाता है कि किसी निश्चित समय अंतराल में हुआ कुल विस्थापन, वेग-समय ग्राफ तथा समय-अक्ष और समय अंतराल के प्रारम्भ व समाप्ति को प्रदर्शित करने वाली ऊर्ध्वाधर रेखाओं के द्वारा संबद्ध क्षेत्र के क्षेत्रफल के बराबर होता है।

उदाहरण 3

निश्चित समाकल के उपयोग द्वारा एक समान त्वरण से x- अक्ष की दिशा में गतिशील किसी वस्तु का समय t पर वेग तथा निर्देशांक ज्ञात कीजिए। वेग का प्रारंभिक मान v_0 तथा प्रारंभिक निर्देशांक शून्य है।

हल :

समाकल की सीमायें $t_2=0$; $v_1=v$; $x=0$ तथा $t_2=t$, $v_2=v$, $x_2=x$ हैं। अतः उपरोक्त सीमाओं के बीच व्यंजक $dv=adt$ का समाकलन करने पर

$$\int_{v_1}^{v_2} dv=\int_{t_1}^{t_2} adt$$

$$v_2-v_1=\int_0^t adt=at$$

अथवा $v-v_0=at$

और भी $$\int_0^x dx=\int_{t_1}^{t_2} vdt$$

$$x=\int_0^t (v_0+at)\ dt=v_0\ t+\tfrac{1}{2}a\ t^2$$

यह आवश्यक नहीं है कि ग्राफ के अंतर्गत क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए सदैव समाकलन का ही उपयोग किया जाए। चित्र 6 में एकसमान त्वरण से गतिशील वस्तु का वेग-समय ग्राफ दिखाया गया है। समय $t=0$ तथा $t=t$ के लिए ग्राफ के क्षेत्रफल को एक आयत तथा त्रिभुज में विभाजित किया जा सकता है। आयत का क्षेत्रफल $v_0 t$ तथा त्रिभुज का क्षेत्रफल $\frac{1}{2}\ t\times at=\frac{1}{2}a\ t^2$ है। चूंकि विस्थापन कुल क्षेत्रफल के बराबर होता है अतः

$$-x_0=x_0t+\tfrac{1}{2}\ at^2$$

पारिभाषिक शब्दावली

अदिश	scalar
अदीप्त	nonluminous
अध्यारोपण	superposition
अर्धव्यास	radius
अर्ध दीर्घ अक्ष	semi major axis
अर्ध रजित	half silvered
अन्तर आणविक	inter molecular
अन्तराल	interval
अनन्त सूक्ष्म	infinitesimal
अन्योन्यक्रिया	mutual action
अनावर्ती	unharmonic
अनियमितताएँ	irregularities
अनुत्तेजित	unexcited
अनुदैर्घ्य	longitudinal
अनुनाद	resonance
अनुपात	ratio
अनुप्रस्थ	transverse
अनुवर्ती	successive
अनुसंधान	research
अपवर्जन नियम	exclusion principle
अपवर्तन	refraction
अपवर्तनांक	refractive index
अप्रगामी तरंग	stationary wave
अप्रत्यास्थी	inelastic
अभ्यास	exercise
अभिकेन्द्रीय त्वरण	centripetal acceleration
अभिगृहीत	postulate
अभिदृश्यक लेंस	objective lens
अभिलक्षणिक	characteristic
अभिलंबी द्विभाजक	normal bisector
अभिसारी	convergent
अवकलन	differentiation
अवयव	constituent
अवशोषण स्पेक्ट्रम	absorption spectrum
अवस्थितत्व	inertia
अवस्थितत्व निर्देशतंत्र	inertial frame of reference
अवोगाद्रो संख्या	Avogadro number
आइस बर्ग	ice berge
आकाश गंगा	milky way
आदर्श लोलक	ideal pendulum
आधारभूत	fundamental
आनति	inclination
आपतन	incidence
आपेक्षिक सिद्धान्त	relativity principle
आभासी प्रतिबिम्ब	virtual image
आयत	rectangle
आयतन प्रत्यास्थता	volume elasticity
आयाम	amplitude
आयनन विभव	ionisation potential
आवर्त्तकाल	time period
आवर्त सारिणी	periodic table
आवर्द्धन	magnification
आवृत्ति	frequency
आवेग	impulse
आवेश	charge
आसन्न	adjacent
इलेक्ट्रॉन सूक्ष्मदर्शी	electron microscope
ईंधन	fuel
उच्चालन	slope
उच्च वोल्टता	high voltage
उर्ध्वाधर काट	vertical cross section
उर्मिका टंकी	ripple tank

उपग्रह निर्गमन	satellite launching
उत्तेजित अवस्था	excited state
ऊर्जा समतुल्यांक	energy equivalent
ऊष्मा गतिकी	thermodynamics
एक समान गति	uniform motion
एकान्तर	corresponding
एकवर्णी	monochromatic
कक्षा	orbit
कणिका सिद्धान्त	particle theory
कला	phase
कला संबद्धस्रोत	coherent sources
कम्पन	vibration
कक्षाओं का नियम	law of orbits
क्वांटम संख्या	quantum number
काल	time
कार्तीय निर्देशांक तंत्र	cartesian co-ordinate system
कार्यफलन	work function
किरण पुंज	beam of rays
किलो मोल	killo mole
कृत्रिम उपग्रह	artificial satellite
कुण्डलित कमानी	spring balance
कुल्याकरण	canal rays
कैथोड किरणें	cathode rays
कोज्या	cosine
कोणिक त्वरण	angular acceleratton
वेग	angular velocity
कोटिज्या	cotangent
कोणीय संवेग	angular momentum
कोणीय प्रसार	angular expansion
कोणीय आवृत्ति	angular frequency
कौंध प्रकाश	flash light.
खगोलीय मात्रक	astronomical unit
खनिज तेल	mineral oil
खुरदुरा	rough
गतिज ऊर्जा	kinetic energy
गतिज सिद्धान्त	kinetic theory
गति विज्ञान	dynamics
गलनांक	melting point
गर्त	trough
गामा किरणें	gamma rays
गुरुत्वीय क्षेत्र	gravitational field
गूंज	echo
गुणांक	coefficient
गैलिलीय रूपांतरण	Galilean transformation
घटक	component
घनकोण	cubical angle
घनत्व	density
घर्षण	friction
घात	power
घिरनी	pulley
घूर्णन	rotation
घूर्णन केन्द्र	centre of rotation
चरम सीमा	limit
चरराशि	variable
चतुर्थांश	quadrant
चिकना समतल	smooth surface
जड़ता-घूर्ण	moment of inertia
जल प्रपात	water fall
जल विद्युत घर	hydro electric power station
ज्या फलन	sinefunction
ज्योति तीव्रता	luminous intensity
टक्कर	collision
डॉट गुणनफल	dot product
डाप्लर प्रभाव	Doppler effect
तनाव	tension
तनु फिल्म	thin film
तत्व	element
तरंगदैर्घ्य	wave length
तरंगिका	wavelet
त्वरण	acceleration
तन्त्र	instrument
ताप	temperature
तारत्व	pitch
तात्क्षणिक	instantaneous

तुरमली पट्टिका	turmiline plate
दक्षता	efficiency
दृढ़ता	rigidity
दृढ़ पिण्ड	rigid body
दक्षिणावर्त	clockwise
दाब	pressure
दाशमिक	decimal
दिशा	direction
दूरबीन	telescope
द्वैत प्रकृति	dual nature
दोलन	oscillation
ध्वनि	sound
धारकता	capacity
धारा तीव्रता	current intensity
धुरी	exis
ध्रुव	pole
ध्रुवण	polarisation
नगण्य	negligible
नाभिक	nucleus
नाभिक भट्टी	nuclear reactor
नाभिकीय विभंजन	nuclear fission
नाभिकीय विगलन	nuclear fusion
निरूपण	representation
निर्वात	vacuum
निस्पंद	node
पथान्तर	path difference
परमाणु द्रव्यमान संख्या	atomic mass number
परवलय	parabola
परावैंगनी	ultraviolet
परावर्तन	reflection
परास	range
पराश्रव्य	ulitrasonics
पद्धति	system
प्रकाश वर्ष	light year
प्रकीर्णन	scattering
प्रगामीतरंग	progressive
प्रत्यानयन बल	restoring force
प्रत्यावर्ती धारा	alternating current
प्रत्यास्थतागुणांक	elasticity coefficient
प्रतिकर्षण	repulsion
प्रतिक्रिया	reaction
प्रतिबल	stress
प्रतिदीप्ति	fluorescence
प्रतिरोध	resistance
प्रतिलोम वर्ग नियम	inverse square law
प्रभावीबल	effective force
प्रायोगिक सत्यापन	experimental verification
परिक्रमणकाल	time of revolution
प्रेरण	induction
प्रेरकता	inductance
पलायन वेग	escape velocity
परिघटना	process
प्रणोदित दोलन	force oscillations
प्रवर्तन	ejection
प्रामाणिक	standard
प्रयोगशाला	laboratory
प्रयोजना	project
पुर्नउत्पादनीय	reproducible
पोलेराइड	polaroid
पोषित दोलन	maintained oscillations
पृष्ठ तनाव	surface tension
फ्रउन होपर रेखाएँ	fraunhofer lines
फ्रिंज	fringe
फ्रेनल द्विप्रिज्म	franel's bi-prism
बज्रगुणन	cross multiplication
बल घूर्ण	moment of force
बल विस्थापन वक्र	force displacement curve
बल युग्म	couple of force
व्युत्पन्न	derived
व्यतिकरण	Interference
बहुतल भवन	multistory building
वामावर्त	anticlockwise
बाह्य बल	external force
विभेदन क्षमता	penetrating power
बैंड उत्सर्जन स्पैक्टम	band absorption spectrum
बिम्ब	image

बृहस्पतिवार	Jupitor
ब्राउनीगति	brownio.. motion
भू-केन्द्रिक	earth centred
मंदक विभव	retarding potential
मंदन	retardation
मन्दाकिनी	galaxy
माड्यूलूस	modules
माध्य सौर दिन	mean solar day
माध्यम	medium
मानक	standard
माप	measurement
मिश्र धातु	alloy
मूल मात्रक	fundamental unit
यांत्रिकी	mechanics
यू-नली	u-tube
रक्ताणु	blood corpuscles
रफ्तार	speed
रवाहीन	non-crystalline
राशि	quantity
रासायनिक ऊर्जा	chemical energy
रासायनिक संयोजन	chemical combinalion
रुद्धोष्म	abiabatic
रेखीय वायुलीक	linear air track
रेडियन	radian
रेडियो तरंग	radio wave
रोगाणु	virus
लब्ध	result
लंबन विधि	parallax method
लुंठन घर्षण	rolling friction
लेसर	laser
लोरेण्टस बल	lorentz force
वलय	ring
वर्ग व्युत्क्रमानुपाती नियम	Inverse square law
वृतीय गीत	circular motion
व्यास	diameter
व्युत्क्रमानुपाती	reciprocal
वायुमण्डल	atmosphere

वायु स्तम्भ	air column
विकिरण	radiation
विकृति	strain
विगलन	fusion
विद्युत क्षेत्र	electric field
विद्युत परिपथ	electric circuit
विद्युत चुम्बकीय तरंगें	electromagnetic waves
विद्युत वाहक बल	electromotive force
विद्युत अपघटन	electrolysis
विमायुत	dimensional
वियोजन	resolution
विरल माध्यम	rare medium
विश्व	universe
विशिष्ट ऊष्मा	specific heat
विसर्जन	diffusion
विस्थापन	displacement
विवर्तन	diffraction
वोल्टता	voltage
विश्राम स्थिति	rest position
हर्ट्स	hertz
ह्रास	loss
शक्ति	power
श्यानता	viscosity
स्थानान्तरण गति	transverse velocity
स्थिरांक	constant
स्निग्ध फर्श	greeged Plane
स्खलनिक घर्षण	slipping friction
स्पर्श रेखा	tangent
स्पैक्ट्रम लेखी	spectrograph
स्पंद	beats
समकोणिक	right angled
समतल ध्रुवित	plane polarized
समतापीय	isothermal
समस्थानिक	isotope
समरेखीय गति	canstant linear motion
समरूप त्रिभुज	congurent triangle
समष्टि व्युत्क्रमण	population inversion
समाकलन	integration

समानान्तरित्र	collimater
समीकरण	equation
सरल आवर्ती दोलन	simple harmonic oscillation
स्वाधीन दोलन	free oscillation
स्वरित्र द्विभुज	tunning fork
स्वरमापी	sonometer
स्वतः उत्सर्जन	self emission
सादृश्य	analogy
साहचर्य नियम	distributive law
सार्वभौमिक गुरुत्व नियम	universal gravitational law
सांख्यिक	statistical
सुग्राहिता	sensitivity
सूर्य केन्द्रिक	sun centered
सूक्ष्मदर्शी	microscope
सूक्ष्म तरंग	miscrowave
सेलसियस	celcious
सौर मण्डल	solar system
संचयन नियम	commutative law
संघट्ट प्राचन	distance of closest approach
संचरण	transmission
संतुलन चक्र	balance wheel
संतत स्पैक्ट्रम	continuous spectrum
संवादी	harmonic
संपीडन	compression
संरचना	structure
संवेग	momentum
संवादी	note
क्षोभ	disturbance
श्रृंग	crest